

— Sujet simple pour valider le cours. —

Exercice 1. [Correction] D'après un problème des Mines d'Ales.

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base classique de \mathbb{R}^2 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on note h_A l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A

$$\text{Ainsi on a : } A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_A)$$

1. Calcul de A^n .

- Déterminer \vec{u} une base de $\ker(h_A - 2id)$
- Déterminer \vec{v} une base de $\ker(h_A - id)$
- Justifier que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^2 et déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(h_A)$
- Déterminer le lien entre A et D puis calculer **explicitement** A^n .

2. Calcul de $\exp(tA)$.

Pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}$, on admet que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

ainsi on a $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$

On fixe $t \in \mathbb{R}$ et on considère la matrice $E_n(tA)$ définie par

$$E_n(tA) = \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

- En utilisant Q1d, expliciter à l'aide de somme le coefficient $a_n(t)$.
- En déduire que la suite $(a_n(t))$ a une limite $a(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$ et calculer cette limite.

On peut faire le même travail avec les coefficients $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$
ET on trouve

$$b_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -6e^{2t} + 6e^t, \quad c_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{2t} - e^t, \quad d_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2e^{2t} + 3e^t$$

(c) À cause des calculs précédents et par analogie avec la question 2.b., on définit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Votre calcul} & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

- Montrer qu'il existe deux matrices Q et R telles que $\exp(tA) = e^{2t}Q + e^tR$.
 - Montrer que : $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \exp(tA) \cdot \exp(sA) = \exp((t+s)A)$
 - Montrer que la fonction ϕ de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(t) = \exp(tA)$ est injective?
- (d) **Bonus**

i. Montrer que, pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}$, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge.

ii. En utilisant l'inégalité de Taylor, CàD avec le TTTAAFFFF, montrer que $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Exercice 2. D'après CCINP-PC 2022. **Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes**

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

Si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes avec $V \neq \mathcal{O}$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \text{ avec } (R = \mathcal{O} \text{ ou } \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .

Dans cette exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui, à un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

1. Étude d'un exemple si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

On effectue la division euclidienne de AP par B , CàD on a $AP = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Vérifier/Justifier que : $Q = X + 1$ et $R = 2X^2 + X$

Conclusion : pour cet exemple, on a $\varphi(P) = R = 2X^2 + X$.

2. Dans cette question, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

(a) Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

(b) On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}[X]$.

Par le théorème de division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 = BQ_2 + R_2 \quad \text{et } \deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(B)$$

Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B en fonction de λ, μ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.

En déduire que φ un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

3. Étude d'un exemple Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

(a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B} = (X^0, X^1, X^2)$ est :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

(b) Calculer $P(X) = \det(X I_3 - A)$. Vérifier que $P(X)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = 3$ et $r = -1$ sont ses racines

(c) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B}' de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. *Étude d'un second exemple* Dans cette partie uniquement, on suppose que

$$n = 2, \quad A = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \quad \text{et} \quad B = X^3$$

(a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base (X^0, X^1, X^2) est :

$$T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

(b) En écrivant $T = D + N$. Calculer T^p .

5. Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que le nombre n est un entier quelconque de \mathbb{N}^* .

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme de degré $(n + 1)$ et qu'il admet $(n + 1)$ racines simples.

On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points x_0, \dots, x_n par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées : $\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

(a) Décomposition avec les polynômes de Lagrange

i. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que x_0, \dots, x_n sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

ii. Dédire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

iii. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

(b) Réduction de l'endomorphisme φ

i. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

ii. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

iii. En utilisant Q.5.a.ii, en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

iv. Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$