

Exercice 1. [Correction] On se place dans $\mathbb{R}[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} .

On considère un entier $n \geq 1$ et un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ de degré n .

On définit une application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, par $f(P) = Q + XR$

où Q et R sont les quotients et restes de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T .

On note f_n la restriction de f au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Dans cette question on fixe $n = 2$ et $T = X^2$.

Écrire la matrice de f_2 dans la base canonique

Vérifier que f_2 est une symétrie vectorielle.

Préciser par rapport et parallèlement à quels sous-espaces elle s'applique (on fera apparaître une base de chaque sous-espace).

On revient au cas général.

4. Soit P un polynôme.
 - (a) Montrer que $P \in \text{Ker } f$ ssi il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = (1 - XT)R$.
 - (b) En déduire que $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}_n[X]$.
5. On suppose que : $P \in \text{Ker } f$.
Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket \quad X^k P \in \text{Ker } f$
6. On suppose (dans cette question uniquement) que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul et on note P_0 un polynôme non nul de $\text{Ker } f$ de degré minimal et $d = \deg P_0$.
Ainsi tous les polynômes non nuls de $\text{Ker } f$ sont donc de degrés supérieurs ou égaux à d .
 - (a) Montrer que $d \geq n/2$.
 - (b) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$.
 - (c) Que vaut $\text{rg } f_n$?

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème on choisit $T = X^n$.

7. Soit $P \in \text{Ker } f_n$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$, une racine $n + 1$ -ième de l'unité.
Montrer que α^2 est une racine de P .
8. En déduire que si n est pair alors f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. On suppose que n est impair.
 - (a) Calculer $f_n(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
 - (b) Montrer qu'il existe un polynôme P_0 de degré $(n + 1)/2$ tels que $P_0 \in \text{Ker } f_n$.
 - (c) En déduire $\text{rg } f_n$, puis donner une base de $\text{Im } f_n$.
10. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\text{Ker } f_n \oplus \text{Im } f_n = \mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 2. [Correction] Relation de congruence de Touchard

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k.$$

L'objectif du problème est de montrer que pour tout nombre premier p on a la relation de congruence : $u_p \equiv 2[p]$

1. Vérifier la relation de congruence pour $p \in \{2, 3, 5\}$.
2. Justifier, (sans chercher à la calculer, ce qui sera l'objet de la question 6), qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$
3. Prouver que la fonction f possède un développement limité en 0 à tout ordre.

Pour tout entier naturel n , on note $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ les coefficients du développement limité de la fonction

$$f \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } n+1, \text{ de sorte que } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1}).$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!a_n = u_n$
6. Avec la théorie des EDL1, trouver l'expression de $f(x)$.

On trouve $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{(e^t - 1)}$

7. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^x + \sum_{r=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p)$$

Soit p un nombre premier.

On note \mathcal{A}_p l'ensemble des nombres rationnels r pouvant s'écrire sous la forme $r = c/d$ où c et d sont des entiers et p ne divise pas d .

8. Montrer que $(\mathcal{A}_p, +, \times)$ est un anneau.
9. Montrer qu'il suffit de prouver que $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$ pour établir la relation de congruence définie dans l'introduction.
10. Démontrer la relation de congruence.