Mardi 21 Avril 2026.

Exercice 1. [Correction] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

L'objectif est de déterminer les matrices X vérifiant : $X^2 = A$ ou

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\overrightarrow{U} = (x; y) \neq \overrightarrow{\mathscr{O}}$ tel que $A\overrightarrow{U} = \lambda\,\overrightarrow{U}$
   (a) Montrer, avec un RA, que la matrice $A - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible.
   (b) Calculer et factoriser $\det(A - \lambda\, I_2)$; en déduire que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

2. Des vecteurs
   (a) Résoudre le système $A\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_1}$, la solution $\overrightarrow{C_1} = (...; 1)$ CàD celle dont la deuxième coordonnée vaut 1.
   (b) Résoudre le système $A\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{U}$.
   Expliciter $\overrightarrow{C_2}$, la solution $\overrightarrow{C_2} = (...; 1)$ CàD celle dont la deuxième coordonnée vaut 1.

3. On note $P = \left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}$, dans cet ordre.
   Justifier que P est inversible, calculer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}AP$. *On vient de diagonaliser la matrice A*

4. `On va maintenant résoudre l'équation` $X^2 = A$.
   On suppose que X est une matrice tel que $X^2 = A$. On considère la matrice $Y = P^{-1}XP$
   (a) Justifier que : $X^2 = A \iff Y^2 = D$ et $YD = DY$.
   (b) En écrivant $Y = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et en utilisant $YD = DY$, montrer que $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
   (c) En déduire qu'il existe 4 matrices Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vérifiant $Y^2 = D$
   (d) Conclure qu'il existe 4 matrices vérifiant $X^2 = A$
   et donner leur expression en fonction de Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 et de P, P^{-1}

——— Mercredi 22 Avril 2026. ———

Exercice 2. [Correction]

On note $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{M}at_3(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrice 3×3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On considère $G=\{M_{a,b}\in \mathcal{M}at_3(\mathbb{C})$ avec $a,b\in\mathbb{C}\}$ avec $M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{O}=M_{0,0}$ la matrice nulle, $I=M_{1,0}$ la matrice identité et $A=M_{0,1}$

1. Calcul de $[M_{a,b}]^n$.
   (a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension et une base.
   (b) Montrer que G est stable par le produit.
   (c) On note $B=A+I$ et $C=A-2I$.
   Montrer que la famille $\left(B,C\right)$ est une base de G et calculer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base.
   (d) Calculer B^2, C^2, $B.C$ et CB
   En déduire $[M_{a,b}]^2$.
   (e) Calculer $[M_{a,b}]^n$.
2. Diagonalisation de A et de $M_{a,b}$
   (a) Montrer que $P(x)=\det(A-x\,I)$ est un polynôme de degré 3 et que $r=-1$ et $r=2$ sont ses seules racines
   (b) On considère E_1 l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{X}=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $A\overrightarrow{X}=-\overrightarrow{X}$
   Montrer que E_1 est un ssev de dimension 2. On note $\left(\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2}\right)$ une base E_1
   (c) On considère E_2 l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{X}=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $A\overrightarrow{X}=2\overrightarrow{X}$
   Montrer que E_2 est un ssev de dimension 1. On note $\overrightarrow{C_3}$ une base E_1
   (d) On note $P=\left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right)$ la matrice 3×3 dont les vecteurs colonnes sont $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},\overrightarrow{C_3}$
   Justifier que P est inversible et que $A.P=P.D$ avec $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (e) Justifier que $M_{a,b}=P.\mathscr{D}.P^{-1}$ avec $\mathscr{D}=\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ et calculer $[M_{a,b}]^n$
3. Application. On veut trouver les matrices $M\in G$ vérifiant $(M+I)^{2n}-I=\mathcal{O}$
   On va utiliser la matrice $\mathscr{D}$ de la question Q2e.
   (a) Montrer que : $(M+I)^{2n}-I=\mathcal{O} \iff (\mathscr{D}+I)^{2n}-I=\mathcal{O}$
   (b) Déterminer les matrices $\mathscr{D}$ vérifiant $(\mathscr{D}+I)^{2n}-I=0$.
   (c) Déterminer les matrices M de G vérifiant $(M+I)^{2n}-I=\mathcal{O}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. (a) Montrer que la matrice $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible.

   On fait un RA. On suppose que la matrice $A-\lambda I_2$ est inversible

   la matrice $(A-\lambda I_2)^{-1}$ existe et le peut l'utiliser

   On sait que $\overrightarrow{U}=(x;y)\neq\overrightarrow{\mathscr{O}}$ et que $A\overrightarrow{U}=\lambda\overrightarrow{U}$, on a

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{U}=\lambda\overrightarrow{U} &\implies A\overrightarrow{U}-\lambda\overrightarrow{U}=\overrightarrow{\mathscr{O}}\\ &\implies (A-\lambda I_2)\overrightarrow{U}=\overrightarrow{\mathscr{O}}\\ &\implies \overrightarrow{U}=(A-\lambda I_3)^{-1}\overrightarrow{\mathscr{O}}=\overrightarrow{\mathscr{O}}\ OUPS\end{aligned}$$

   Conclusion : la matrice $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible.

   (b) Calculer et factoriser $\det(A-\lambda I_2)$

$$\begin{aligned}\text{On a } \det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(2-\lambda)^2-1\\ &=\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)-1\\ &=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

   En déduire que $\lambda=1$ ou $\lambda=3$

   Comme la matrice $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible donc $\det(A-\lambda I_2)=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$

   Donc $\lambda=1$ ou $\lambda=3$.

2. Résoudre le système $A\overrightarrow{U}=\overrightarrow{U}$ et donner la solution $\overrightarrow{C_1}=(...;1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.

   On résout $A\overrightarrow{U}=\overrightarrow{U} \iff \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

   On trouve de les solutions sont $\overrightarrow{U}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{C_1}=(-1;1)$

3. Résoudre le système $A\overrightarrow{U}=3\overrightarrow{U}$ et donner la solution $\overrightarrow{C_2}=(...;1)$ CàD celle dont la dernière coordonnée vaut 1.

   On résout $A\overrightarrow{U}=3\overrightarrow{U} \iff \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

   On trouve de les solutions sont $\overrightarrow{U}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{C_2}=(1;1)$

4. On note $P=\left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2}$, dans cet ordre.

   Justifier que P est inversible et calculer $D=P^{-1}AP$. *On vient de diagonaliser la matrice A*

   On a $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

   Comme $\det(P)=2\neq 0$, la matrice p est inversible et on trouve $D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

5. On suppose que X est une matrice tel que $X^2=A$. On considère la matrice $Y=P^{-1}XP$

   (a) Justifier que : $X^2=A \iff Y^2=D$ et $YD=DY$.

   On va remplacer A par PDP^{-1} et X par PYP^{-1} et ré-organiser

$$\begin{aligned} X^2=A &\iff \left(PYP^{-1}\right)\left(PYP^{-1}\right)=PDP^{-1}\\ &\iff PYYP^{-1}=PDP^{-1}\\ &\iff Y^2=D\end{aligned}$$

   De plus $X^2=A \implies XA=AX$. Maintenant on va remplacer A par PDP^{-1} et X par PYP^{-1} et ré-organiser

$$\begin{aligned} XA=AX &\iff \left(PYP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=\left(PDP^{-1}\right)\left(PYP^{-1}\right)\\ &\iff PYDP^{-1}=PDYP^{-1}\\ &\iff YD=DY\end{aligned}$$

   (b) En écrivant $Y=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ et en utilisant $YD=DY$, montrer que $Y=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$

On a $YD = DY \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} a & 3c \\ b & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 3b & 3d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} b & & = & 3b \\ & 3c & = & c \end{cases}$$

Conclusion : $YD = DY \iff Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

(c) En déduire qu'il existe 4 matrices Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vérifiant $Y^2 = D$

On a maintenant $Y^2 = D \iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 & & = & 1 \\ & d^2 & = & 3 \end{cases}$$

Conclusion : Il y a 4 solutions $Y_1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +\sqrt{3} \end{pmatrix}$,
$Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) Résoudre l'équation $X^2 = A$.

Conclusion : Il y a 4 solutions $X_i = PY_iP^{-1}$ avec $i = 1, 2, 3, 4$

Parmi ces 4 solutions, la solution $X_1 = PY_1P^{-1}$ est remarquable car $Y_1 = \begin{pmatrix} \oplus 1 & 0 \\ 0 & \oplus\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Cette solution est notée $\sqrt{A}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Calcul de $[M_{a,b}]^n$.

   (a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension et une base.

   On a

$$\begin{aligned} M \in G &\iff M = aI + bJ \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in vect(I, J) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } G = vect(I, J)$$

   Donc G est un ssev et (I, J) est une famille génératrice.
   De plus la famille (I, J) est libre (car non //) donc c'est une base de G et $\dim(G) = 2$

   (b) Montrer que G est stable par le produit.

   On a

$$\begin{aligned} M_{a,b}.M_{a',b'} &= (aI + bJ).(a'I + b'J) \\ &= aa'I + (ab' + ba')J + bb'J^2 \\ &\quad \text{Or } J^2 = 2I + J \\ &= (aa' + 2bb')I + (ab' + ba' + bb')J \in Vect(I, J) = G \end{aligned}$$

   (c) On note $B = A + I$ et $C = A - 2I$.
   Montrer que la famille $\Big(B, C\Big)$ est une base de G et calculer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base.

   B, C sont des CL donc $\in G$
   (B, C) est libre car $\neq 0$ et non //
   cardinal=2 et $\dim(G) = 2$

   Conclusion : C'est une base

   (d) Calculer B^2, C^2, $B.C$ et CB

   On trouve $B^2 = 3.B$, $C^2 = (-3).V$, $B.C = \mathcal{O}$ et $CB = \mathcal{O}$

   En déduire $[M_{a,b}]^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } [M_{a,b}]^2) &= (\lambda B + \mu C)(\lambda B + \mu C) \\ &= \lambda^2 B^2 + \mathcal{O} + \mathcal{O} + \mu^2 C^2 \\ &= \lambda^2 3B + \mu^2 (-3)C \end{aligned}$$

   (e) Calculer $[M_{a,b}]^n$.

   On démontre par récurrence,

$$H_{<n>}\ [M_{a,b}]^n = \lambda^n (3)^{n-1} B + \mu^n (-3)^{n-1} C$$

   OU BIEN
   Comme $BC = CB$, on peut aussi utiliser avec le Binôme

$$\begin{aligned} [M_{a,b}]^n &= (\lambda B + \mu C)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\lambda B]^k [\mu C]^{n-k} \\ &\quad \text{Or } BC = CB = 0 \\ &= \underbrace{[\mu C]^n}_{k=0} + \mathcal{O} + \ldots + \mathcal{O} + \underbrace{[\lambda B]^n}_{k=n} \\ &\quad \text{Or on a} \\ &\quad [\lambda B]^n = \lambda^n B^n = \lambda^n (3)^{n-1} B \\ &\quad [\mu C]^n = \mu^n C^n = \mu^n (-3)^{n-1} C \\ &= \lambda^n (3)^{n-1} B + \mu^n (-3)^{n-1} C \end{aligned}$$

2. Diagonalisation de A et de $M_{a,b}$

   (a) Montrer que $P(x) = \det(A - x\,I)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = -1$ et $r = 2$ sont ses seules racines

On a facilement que $P(x) = -x^3 + 3x + 2$

et que $r = -1$ et $r = 2$ sont ses seules racines

Comme le polynôme P est degré 3, il admet 3 racines distinctes ou confondues,

`il y a donc une racine double`.

On a bien $P(-1) = 0$ et $P(2) = 0$, donc $r = -1$ et $r = 2$ sont bien des racines de P

De plus $P'(x) = -3x^2 + 3$ et $P'(-1) = 0$ donc $r = -1$ est une racine double de P

Conclusion : les 3 racines de P sont : $r = -1$ double et $r = 2$

et on a $P(x) = -x^3 + 3x + 2 = \ominus (x+1)^2(x-2)$

(b) On considère E_1 l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$
Montrer que E_1 est un ssev de dimension 2. On note $\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}\right)$ une base E_1

À faire

(c) On considère E_2 l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{X} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{X}$
Montrer que E_2 est un ssev de dimension 1. On note $\overrightarrow{C_3}$ une base E_1

À faire

(d) On note $P = \left(\overrightarrow{C_1}|\overrightarrow{C_2}|\overrightarrow{C_3}\right)$ la matrice 3×3 dont les vecteurs colonnes sont $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}$

Justifier que P est inversible et que $A.P = P.D$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

À faire

(e) Justifier que $M_{a,b} = P.\mathscr{D}.P^{-1}$ avec $\mathscr{D} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ et calculer $[M_{a,b}]^n$

Comme P est inversible et $A.P = P.D$, on a $A = P.D.P^{-1}$

Ainsi on a en cheminant
$$\begin{aligned} M_{a,b} &= a\,I + b\,A \\ &= a\,I + b\,P.D.P^{-1} \\ &= a\,P.I.P^{-1} + b\,P.D.P^{-1} \\ &= P.\left(a\,I + b\,D\right)P^{-1} \\ &= P.\mathscr{D}.P^{-1} \end{aligned}$$

Et $[M_{a,b}]^n = P.\mathscr{D}^n.P^{-1}$

(f) Application. On veut trouver les matrices $M \in G$ vérifiant $(M+I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On va utiliser la matrice $\mathscr{D}$ de la question Q2e.

i. Montrer que : $(M+I)^{2n} - I = \mathcal{O} \iff (\mathscr{D}+I)^{2n} - I = \mathcal{O}$

On a le calcul suivant

$$\begin{aligned} (M+I)^{2n} - I = \mathcal{O} &\iff \left(P.\mathscr{D}.P^{-1} + I\right)^{2n} - I = \mathcal{O} \\ &\iff \left(P.\mathscr{D}.P^{-1} + P.I.P^{-1}\right)^{2n} - I = \mathcal{O} \\ &\iff \left(P\left[\mathscr{D}+I\right].P^{-1}\right)^{2n} - I = \mathcal{O} \\ &\iff P\left[\mathscr{D}+I\right]^{2n}.P^{-1} - I = \mathcal{O} \\ &\iff P\left[\mathscr{D}+I\right]^{2n}.P^{-1} - P.I.P^{-1} = \mathcal{O} \\ &\iff P\left[\mathscr{D}+I\right]^{2n}.P^{-1} - P.I.P^{-1} = \mathcal{O} \\ &\iff P\left[(\mathscr{D}+I)^{2n} - I\right]P^{-1} = \mathcal{O} \\ &\iff (\mathscr{D}+I)^{2n} - I = \mathcal{O} \end{aligned}$$

La dernière $\iff$ est valide car P et P^{-1} sont inversibles

ii. Déterminer les matrices $\mathscr{D}$ vérifiant $(\mathscr{D}+I)^{2n} - I = 0$.

On a

$$(\mathscr{D}+I)^{2n}-I=0 \iff \left[\begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{2n}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\iff \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (a+2b+1)^{2n}=1 \\ \\ (a-b+1)^{2n}=1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a+2b+1=\omega_k \\ \\ a-b+1=\omega_l \end{array} \right. \qquad \textit{avec } \omega_k,\omega_l \textit{ des racines (2n)-ième de l'unité}$$

On en déduit $a=(1/3)\omega_k+(2/3)\omega_l-1$ et $b=(1/3)\omega_k-(1/3)\omega_l$

Conclusion : il y a $(2n)\times(2n)4\,n^2$ solutions $D_{a,b}$

iii. Déterminer les matrices M de G vérifiant $(M+I)^{2n}-I=\mathcal{O}$

On sait que $M=P.\mathscr{D}.P^{-1}$

Conclusion : il y a $(2n)\times(2n)4\,n^2$ solutions $M_{a,b}$