Exercice 1. [Correction] On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathscr{B} = (X^0, X, X^2)$ sa base canonique.

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_2[X]$

$$f: \ P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$
$$\phi: \ P \longmapsto P(1)$$

1. Justifier que ϕ est une forme linaire, CàD linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer sa matrice.

2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
   L'application f est-elle bijective ?

3. Soit la famille $\mathscr{C} = \left(1, -2X+1, 6X^2 - 6X + 1.\right)$
   Justifier que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   Déterminer $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(f)$.

Exercice 2. [Correction]

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
I désigne la matrice identité et $\mathcal{O}$ la matrice nulle.

On pose $G = \left\{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

On considère : $M = M_{a,b}$ un élément de G avec $b \neq 0$
u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. Ainsi $M = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(u)$
I_E, la fonction identité de E.

1. **Ssev**
   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et déterminer une base et sa dimension.
   (b) Vérifier que G est stable pour le produit.
2. **Base.**
   (a) Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \ker(u - (a+2b).I_E)$.
   (b) Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \ker(u - (a-b).I_E)$.
   (c) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathscr{B}'$.
   (d) Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 3. [Correction] On considère

$$E = Vect\,(\,\sin(x)\,,\,x\sin(x)\,,\,\cos(x)\,,\,x\cos(x)\,)$$

On considère l'application D qui, à une fonction $f \in E$, associe sa fonction dérivée f'.

On a donc $\forall\ f \in E,\ \ D(f) = f'$

1. **Base/CL.**
   (a) Montrer que $\mathscr{B} = (\,\sin(x)\,,\,x\sin(x)\,,\,\cos(x)\,,\,x\cos(x)\,)$ est une base de E.
   (b) Montrer que D est un endomorphisme de E.
   (c) Montrer que les fonctions constantes non-nulle n'appartiennent pas E.
2. **Matrice dans $\mathscr{B}$**
   (a) Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D)$.
   Retrouver que D est un automorphisme de E.
   (b) Déterminer $B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id)$. Rappel : $D^2 = D \circ D$.
   En déduire une base de $\ker(D^2 + id)$.
   (c) Calculer B^2.
   Retrouver que A est un inversible et déterminer A^{-1} en fonction A.
   Déterminer D^{-1} en fonction D.
3. **Matrice dans $\mathscr{C}$.** On considère la famille $\mathscr{C} = \left(e^{ix}\,,\,x\,e^{ix}\,,\,e^{-ix}\,,\,x\,e^{-ix}\right)$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{C}$ est une base E.
   (b) Déterminer $A' = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(D)$.
   (c) En remarquant que A' est diagonale par bloc et que les blocs sont de la forme $\lambda\,I + N$, calculer $(A')^n$.

—— Exercices sans matrice, plus difficile et facultatif ——

Exercice 4. [Correction] E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

On va montrer que $rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E \end{cases}$

Rappel : $rg(f) = \dim\big(\mathit{Im}(f)\big)$

1. Montrer que : $\mathrm{Im}(f+g) \subset [\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)]$.

   En déduire une inégalité reliant $rg(f+g)$, $rg(g)$, $rg(g)$ avec $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
2. On suppose $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$.
   (a) En déduire : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, et montrer : $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
   (b) Soit $x \in E$. montrer : $\exists t \in E$ tel que $f(x) = (f+g)(t)$.
   (c) Montrer : $t \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x - t \in \mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Conclure : $rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \implies \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E \end{cases}$
3. La réciproque. On suppose que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$

   Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f+g)$ puis que $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$

Exercice 5. les hyperplans de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ un entier.

1. Pour tout vecteur $u = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$H_u = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i = 0 \right\}.$$

   (a) Soit $u \in \mathbb{R}^d$.
   Montrer que l'ensemble H_u est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si le vecteur u est non nul dans $\mathbb{R}^d$.
   (b) Soient u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^d$.
   Montrer que si les vecteurs u et v sont colinéaires, alors : $H_u = H_v$.
   (c) Soient u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^d$ tels que $H_u = H_v$. On pose $u = (a_1, \cdots, a_d)$ et $v = (b_1, \cdots, b_d)$.
      i. Soit j un entier entre 1 et d tel que $a_j \neq 0$. Montrer que b_j est non nul.
      ii. Montrer que $H_u \subset H_{a_j \cdot v - b_j \cdot u}$.
      iii. En déduire que les vecteurs u et v sont colinéaires.
2. Soit $\varphi : E \longrightarrow K$ un morphisme non nul.
   (a) Montrer que : $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.
   (b) Montrer qu'il existe $u = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall\, x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \;\; \varphi(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i = 0 \text{ et } \ker(\varphi) = H_u$$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Justifier que ϕ est une forme linaire, CàD linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   Comme $\phi(P) = P(1) \in \mathbb{R}$ donc la fonction ϕ est bien à valeur dans $\mathbb{R}$.

   Transporte $\overrightarrow{0}$

   $\phi(\mathscr{O}) = \mathscr{O}(1) = 0$

   Transporte le CL

   Pour tout $P, Q\lambda, \mu$, on a

$$\begin{aligned}\phi\left(\lambda\, P + \mu\, Q\right) &= \left(\lambda\, P + \mu\, Q\right)(1)\\ &= \lambda\, P(1) + \mu\, Q(1)\\ &= \lambda\, \phi\,(P) + \mu\, \phi\,(Q)\end{aligned}$$

   Conclusion : ϕ est une forme linaire

   Déterminer sa matrice.

   La matrice est de taille 1 ligne et 3 colonnes

   On va déterminer $\mathcal{M}at\mathscr{B}^{\mathscr{C}}(\phi) = \begin{array}{c} \begin{matrix}\phi(X^0) & \phi(X^1) & \phi(X^2)\end{matrix} \\ \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \end{array} \leftarrow 1$

   $\phi(X^0) = X^0(1) = 1$
   $\phi(X^1) = X^1(1) = 1$
   $\phi(X^2) = X^2(1) = 1$

   Conclusion : $\mathcal{M}at\mathscr{B}^{\mathscr{C}}(\phi) = \begin{array}{c} \begin{matrix}\phi(X^0) & \phi(X^1) & \phi(X^2)\end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \quad 1 & \quad 1 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow 1$

2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

   À faire.

   Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

   On trouve $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

   L'application f est-elle bijective ?

   Comme $\det(A) = 1.1/2\,.1/4 \;= 1/8 \neq 0$, la fonction f est bijective.

3. Soit la famille $\mathscr{C} = \left(1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1.\right)$

   Justifier que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2\,[X]$

   La famille est libre car les polynômes sont de degré 2 à 2 différents
   La famille est dans $\mathbb{R}_2[X]$
   $Card\,(\,Famille\,) = 3$
   $\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) = 3$

   Donc c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$

   Déterminer $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(f)$.

$$\begin{aligned}\text{On a } f\left(6X^2 - 6X + 1\right) &= A\,\overrightarrow{U} \qquad avec\ \overrightarrow{U} = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1/4 \\ -6/4 \\ 6/4 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(6X^2 - 6X + 1\right)\end{aligned}$$

   Conclusion : $f\left(6X^2 - 6X + 1\right) = \mathscr{O}\,1 + \mathscr{O}\,(-2X + 1) + \dfrac{1}{4}\,\left(6X^2 - 6X + 1\right)$

   On trouve $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. **Ssev**

   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et déterminer une base et sa dimension.

   On a facilement

   $$M_{a,b} \in G \iff M_{a,b} = aI + bJ \iff M_{a,b} \in Vect(I, J)$$

   Donc $G = Vect(I, A)$ et G est est un ssev.

   La famille (I, A) est génératrice et libre (car $\neq 0$ et non$//$) donc c'est une base de G et $\dim(G) = 2$

   (b) Vérifier que G est stable pour le produit.

   On suppose que $M, M' \in G$. On a

   $$\begin{aligned} M.M &= (aI + bJ)(a'I + B'J) = aa'I + (ab' + ba')J + bb'J^2 \\ &\quad \textit{Or } J^2 = 2I + J \\ &= aa'I + (ab' + ba')J + bb'[2I + J] \\ &= (aa' + 2bb')I + (ab' + ba' + bb') \in vect(I, J) = G \end{aligned}$$

   Conclusion : $M.M \in G$ et G est stable par produit.

2. **Base.**

   (a) Déterminer une base (e_1') de $E_1 = \ker(u - (a + 2b).I_E)$.

   On a

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - (a+2b).I_E) \iff \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (a+2b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\iff \begin{cases} -2bx + by + bz = 0 \\ bx - 2by + bz = 0 \\ bx + by - 2bz = 0 \end{cases}$$

   Comme $b \neq 0$, on peut simplifier par b et trigonaliser.

   $$\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $\ker(u - (a+2b).I_E) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Ainsi $\overrightarrow{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est géné et libre (car ....) une base de $E_1 = \ker(u - (a+2b).I_E)$

   (b) Déterminer une base (e_2', e_3') de $E_2 = \ker(u - (a - b).I_E)$.

   On fait de même et on trouve que $\overrightarrow{e_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_3'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_2 = \ker(u - (a-b).I_E)$

   (c) Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de E ; on la note $\mathscr{B}'$.

   Comme $\det\left(\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right) = ... = 1492 \neq 0$

   Donc la famille est libre, $cardinal = 3$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

   Conclusion : $\mathscr{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ est une base de E

   (d) Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}'$.

   On doit calculer que : $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}'}(u) =$ $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\overrightarrow{e_1}) & u(\overrightarrow{e_2}) & u(\overrightarrow{e_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1' \\ \leftarrow e_2' \\ \leftarrow e_3' \end{array} \end{array}$

   On a

$>$ Comme $e'_1 \in \ker(u - (a+2b)\, id_E)$,

on a $u(e'_1) = (a+2b)\, e'_1$

$= (a+2b)\, e'_1 + \mathscr{O}\, e'_2 + \mathscr{O}\, e'_2$

$>$ Comme $e'_2 \in \ker(u - (a-b)\, id_E)$, ...

$>$ Comme $e'_3 \in \ker(u - (a-b)\, id_E)$, ...

Conclusion : $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\overrightarrow{e'_1}) & u(\overrightarrow{e'_2}) & u(\overrightarrow{e'_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \\ \leftarrow e'_3 \end{array} \end{array}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. **Base/CL.**

   (a) Montrer que $\mathscr{B} = (\sin(x)\,,\, x\sin(x)\,,\, \cos(x)\,,\, x\cos(x)\,)$ est une base de E.

   Comme $E = Vect(...)$, la famille $\mathscr{B}$ est génératrice.

   Libre ? Avec la définition

   On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x)\,.$

   $\boxed{\text{On va montrer que : } a = b = c = d = 0.}$

   J'applique en $x = 0, \pi, -\pi, {}^{+\pi}/_2\,, {}^{-\pi}/_2$

   Ainsi $\mathscr{B}$ est une base et $\dim(E) = cardianl(Base) = 4.$

   (b) Montrer que D est un endomorphisme de E.

   La dérivation est linéaire donc D est linéaire.

   Car $[\lambda\, f + \mu\, g]' = \lambda\, f' + \mu\, g'$

   À valeurs dans E ?

   Soit $f \in F$, on peut écrire $f(x) = ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x)\,.$

   On a maintenant $f'(x) = ... = CL(....) \in F$

   Conclusion : D une endomorphisme de F.

   (c) Montrer que les fonctions constantes non-nulle n'appartiennent pas E.

   On fait un R.A. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x) = K$ avec $K \neq 0$

   $\boxed{\text{On va chercher oups, en fait on va montrer que } K = 0 \text{ donc oups}}$

   $>$ Méthode lourde mais qui marche. J'applique en $x = 0, \pi, -\pi, {}^{+\pi}/_2\,, {}^{-\pi}/_2\,.$

   $>$ Méthode moins. Je dérive l'égalité car ainsi K disparait.

   On obtient une CL et comme la famille $\mathscr{B}$ est libre, j'ai un systèmes simple.

   On en déduit que $a = b = c = d = 0$. Ainsi $K = 0$ Oups.

2. **Matrice dans $\mathscr{B}$**

   (a) Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D)$.

   On a

$$A = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} D(\sin(x)) & D(x\sin(x)) & D(\cos(x)) & D(x\cos(x)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\ \sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\ \cos(x) \end{array} \end{array}$$

   Car
$$\begin{aligned} D(x\sin(x)) &= [x\sin(x)]' \\ &= \sin(x) + x\cos(x) \\ &= 1\ \sin(x) + 0\ x\sin() + 0\ \cos(x) + 1\, x\cos(x) \end{aligned}$$

   Retrouver que D est un automorphisme de E.

   Comme $\det(A) = ... = 1$ que la matrice A est inversible et D est un automorphisme de E.

   (b) Déterminer $B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id)$. Rappel : $D^2 = D \circ D$.

$$\text{On a } B = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2 + id) = A^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\ \sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\ \cos(x) \end{array}.$$

   En déduire une base de $\ker(D^2 + id)$.

$$\text{On a } h \in \ker(D^2+id) \iff h \in E \text{ et } [D^2+id](h)=0$$

$$\text{Or } \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^2+id)=A$$

$$\iff B\overrightarrow{U}=\overrightarrow{0} \qquad \text{avec } \overrightarrow{U}=\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h)=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} b &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{U}=\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h)=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sin(x) \\ \leftarrow x\,\sin(x) \\ \leftarrow \cos(x) \\ \leftarrow x\,\cos(x) \end{matrix}$$

$$\iff h=a\sin+c\cos$$

$$CCL\ :\ \ker(D^2+id)\in Vect(\cos,\sin).$$

La famille $(\cos,\sin)$ est génératrice de $\ker(D^2+id)$ et libre (car non $//$)

Donc c'est une base.

(c) Calculer B^2....

On trouve $B^2=0$

Ainsi $(A^2+I)^2=0 \iff A^4+2\,A^2+I=0 \iff A\,(-A^3-2\,A)=I$.

Donc A est inversible et $A^{-1}=-A^3-2\,A$.

Comme $\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(D^{-1})=A^{-1}$, on a $D^{-1}=-D^3-2\,D$.

3. **Matrice dans $\mathscr{C}$.** On considère la famille $\mathscr{C} = \left(e^{ix} \,,\, x\, e^{ix} \,,\, e^{-ix} \,,\, x\, e^{-ix} \right)$

(a) Montrer que la famille $\mathscr{C}$ est une base E.

Classique : libre, card, dimension

(b) Déterminer $A' = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(D)$.

On a

$$A' = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(D) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} D(e^{ix}) & D(xe^{ix}) & D(e^{-ix}) & D(xe^{-ix}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc:cc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow e^{ix} \\ \leftarrow x\, e^{ix} \\ \leftarrow e^{-ix} \\ \leftarrow x\, e^{ix} \end{array} \end{array}$$

Les formules de changement de base assure que : $A = PA'P^{-1}$

(c) En remarquant que A' est diagonale par bloc et que les blocs sont de la forme $\lambda\, I + N$, calculer $(A')^n$.

Comme A' est diagonale par bloc

et sachant que lorsque N est nilpotente d'ordre 2, $(aI + N)^2 = a^n\, I + na^{n-1}\, N$

On a donc $$(A')^n = \left(\begin{array}{cc|cc} (i)^n & n(i)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (i)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-i)^n & n(-i)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^n \end{array}\right)$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On suppose que $x \in \text{Im}(f+g)$

   Ainsi il existe $a \in E$ tel que $x = (f+g)(a) = \underbrace{f(a)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{g(a)}_{\in \text{Im}(g)} \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

   Conclusion : $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

   Avec la formule de Grassmann, on en déduit que

$$\begin{aligned} rg(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) &\leqslant \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \\ &\leqslant rg(f) + rg(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \\ &\leqslant rg(f) + rg(g) \end{aligned}$$

2. On suppose $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$.
   (a) L'inégalité précédente est une égalité donc

   > $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = 0$ et ainsi $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$

   > et $\dim(\text{Im}(f+g)) = \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$ et comme $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$
   donc on a bien $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

   Conclusion : $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

   (b) Soit $x \in E$. On a $f(x) = f(x) + 0 \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f+g)$
   Donc il existe $t \in E$ tel que $f(x) = (f+g)(t)$.

   (c) On a $f(x) = (f+g)(t) \iff f(x) = f(t) + g(t)$
   $\iff f(x) - f(t) = g(t)$
   $\iff f(x-t) = g(t)$
   Ainsi le vecteur $A = f(x-t) = g(t) \in (\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = \{0\}$. Conclusion : $t \in \text{Ker}(g)$ et $x - t \in \text{Ker}(f)$.

   (d) On a donc $x = \underbrace{x-t}_{\in \ker(f)} + \underbrace{t}_{\in \ker(g)} \in \ker(f) + \ker(g)$.
   Conclusion : $E \subset \ker(f) + \ker(g)$
   Comme $\ker(f) + \ker(g)$ est ssev de E, on a bien $\ker(f) + \ker(g) = E$

   Conclusion : $rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \implies \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} & \textit{D'après Q2a} \\ \ker(f) + \ker(g) = E & \textit{D'après Q2d} \end{cases}$

3. La réciproque. On suppose que : $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$
   On suppose que $x \in \text{Im}(f)$. On a

   Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$
   Comme $a \in E$ et $E = \ker(f) + \ker(g)$ alors $a = k_f + k_g$ avec $(k_f, k_g) \in \ker(f) \times \ker(g)$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } x = f(a) &= f(k_g) \\ &= f(k_g) + 0 \\ &= f(k_g) + g(k_g) \\ &= (f+g)(k_g) \in \text{Im}(f+g) \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f+g)$

   On démontre de même que : $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f+g)$, ainsi on a $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont deux ssev de $\text{Im}(f+g)$

   Conclusion : $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f+g)$ et en fait avec Q1, on a $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f+g)$.
   On obtient avec Grassmann $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$