— Sujet simple pour valider le cours. —

Exercice 1. [Correction] D'après un problème des Mines d"Ales.

On note $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ la base classique de $\mathbb{R}^2$.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on note h_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A

$$\text{Ainsi on a : } A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(h_A)$$

1. Calcul de A^n.
   (a) Déterminer $\vec{u}$ une base de $\ker(h_A-2id)$
   (b) Déterminer $\vec{v}$ une base de $\ker(h_A-id)$
   (c) Justifier que $\mathscr{C}=(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D=\mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(h_A)$
   (d) Déterminer le lien entre A et D puis calculer **explicitement** A^n.

2. Calcul de $\exp(tA)$.

   Pour tout/chaque $x\in\mathbb{R}$, on admet que la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

   ainsi on a $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^x$

   On fixe $t\in\mathbb{R}$ et on considère la matrice $E_n(t\,A)$ définie par

$$E_n(t\,A)=\sum_{k=n}^{n}\frac{(t\,A)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k=\begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

   (a) En utilisant Q1d, expliciter à l'aide de somme le coefficient $a_n(t)$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n(t))$ a une limite $a(t)$ quand $n\to+\infty$ et calculer cette limite.

   On peut faire le même travaille avec les coefficients $b_n(t)\,,c_n(t)$ et $d_n(t)$
   ET on trouve

$$b_n(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-6e^{2t}+6e^t,\quad c_n(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{2t}-e^t,\quad d_n(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-2e^{2t}+3e^t$$

   (c) À cause des calculs précédents et par analogie avec la question 2.b., on définit

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \text{Votre calcul} & -6e^{2t}+6e^t \\ e^{2t}-e^t & -2e^{2t}+3e^t \end{pmatrix}$$

   i. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R telles que $\exp(tA)=e^{2t}Q+e^tR$.
   ii. Montrer que : $\forall\ (s,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \exp(tA)\,.\exp(sA)=\exp(\ (t+s)\,A\ )$
   iii. Montrer que la fonction ϕ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(t)=\exp(tA)$ est injective ?

   (d) Bonus

   i. Montrer que, pour tout/chaque $x\in\mathbb{R}$, que la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ converge.
   ii. En utilisant l'inégalité de Taylor, CàD avec le TTTAAAFFF, montrer que $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^x$

$$\text{Conclusion : }\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

Exercice 2. [Correction] D'après CCINP-PC 2022. **Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes**

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

Si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes avec $V \neq \mathscr{O}$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \text{ avec } (R = \mathscr{O} \text{ ou } \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.

Dans cette exercice, on se donne un entier $n \in \mathrm{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui, à un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

1. Étude d'un exemple si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

On effectue la division euclidienne de AP par B, CàD on a $AP = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Vérifier/Justifier que : $Q = X + 1$ et $R = 2X^2 + X$

Conclusion : pour cet exemple, on a $\varphi(P) = R = 2X^2 + X$.

2. Dans cette question, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $C_n[X]$.
   (a) Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   (b) On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}[X]$.
   Par le théorème de division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times C_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in C[X] \times C_n[X]$ tels que

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 = BQ_2 + R_2 \quad \text{ et } \deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(B)$$

   Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A\,(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par$B$ en fonction de λ, μ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 *en justifiant votre réponse.*

   En déduire que φ un endomorphisme de l'espace vectoriel $C_n[X]$.

3. *Étude d'un exemple* Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

   (a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $\mathscr{B} = \left(X^0, X^1, X^2\right)$ est :

$$A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

   (b) Calculer $P(X) = \det(X\, I_3 - A)$. Vérifier que $P(X)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = 3$ et $r = -1$ sont ses racines
   (c) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. *Étude d'un second exemple* Dans cette partie uniquement, on suppose que

$$n=2, \quad A=A=\alpha+\beta X+\gamma X^{2} \quad \text{et} \quad B=X^{3}$$

(a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathrm{C}_2[X]$ dans la base $\left(X^0, X^1, X^2\right)$ est :

$$T=\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)=\left(\begin{array}{ccc}\alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha\end{array}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathrm{C})$$

(b) En écrivant $T=D+N$. Calculer T^p.

5. **Étude du cas où B est scindé à racines simples**

Dans cette partie, on ne suppose plus que le nombre n est un entier quelconque de N^*.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme de degré $(n+1)$ et qu'il admet $(n+1)$ racines simples.

On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\vee k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k=\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X-x_i}{x_k-x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées : $\forall(k, j) \in \llbracket 0, n \|^2, \quad L_k\left(x_j\right)=\left\{\begin{array}{lll}1 & \text{si} & j=k \\ 0 & \text{si} & j \neq k\end{array}\right.$

(a) Décomposition avec les polynômes de Lagrange

i. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D=P-\sum_{i=0}^n P\left(x_i\right) L_i$.

ii. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P=\sum_{i=0}^n P\left(x_i\right) L_i$.

iii. Montrer que $\mathscr{B}=\left(L_0, \ldots, L_n\right)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

(b) Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A L_k$ par B.

i. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k\left(x_j\right)=0$ si $j \neq k$ et que $R_k\left(x_k\right)=A\left(x_k\right)$.

ii. En utilisant $Q.5.a.ii$, en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \|$ que $\varphi\left(L_k\right)=A\left(x_k\right) L_k$.

iii. Calculer $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) D'après les mines d'Ales.

1. Calcul de A^n.

   (a) Déterminer $\vec{u}$ une base de $\ker(h_A - 2id)$

   On a $h_A - 2id(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\mathscr{O}} \iff h_A(\overrightarrow{x}) - 2id(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{O}$

$$\iff A\overrightarrow{U} - 2\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \qquad \text{avec } \overrightarrow{U} = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4x-6y \\ x-y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & - & 6y & = & 0 \\ x & - & 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x - 3y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $\ker(h_A - 2id)$ est de dimension 1 et $\overrightarrow{u} = (3;1)$

   (b) Déterminer $\vec{v}$ une base de $\ker(h_A - id)$

   On a $h_A - id(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\mathscr{O}} \iff h_A(\overrightarrow{x}) - id(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{O}$

$$\iff A\overrightarrow{U} - \overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \qquad \text{avec } \overrightarrow{U} = \mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4x-6y \\ x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & - & 6y & = & 0 \\ x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x - 2y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $\ker(h_A - id)$ est de dimension 1 et $\overrightarrow{v} = (2;1)$

   (c) Justifier que $\mathscr{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(h_A)$

   On a la matrice de passage $P = \mathcal{M}at(\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Comme $\det(P) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice de passage est inversible donc $\mathscr{C}$ est une base

   De plus, avec les décorations on a $D = \mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(h_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Car $h_A(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u} = 2\,\overrightarrow{u} + 0\,\overrightarrow{v}$ et $h_A(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} = 0\,\overrightarrow{u} + 1\,\overrightarrow{v}$

   (d) Déterminer le lien entre A et D puis calculer **explicitement** A^n.

   Avec la formule de changement de base, on a

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

   On a de plus $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det()}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Conclusion : } A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & -6.2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2.2^n + 3 \end{pmatrix}$$

   Remarque : la formule est encore valide quand $n = 0$.

2. Calcul de $\exp(tA)$.

   (a) En utilisant Q1d, expliciter à l'aide de somme le coefficient $a_n(t)$.

   Pour tout/chaque $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} 3.2^k - 2 & -6.2^k + 6 \\ 2^k - 1 & -2.2^k + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(3.2^k - 2\right) & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(-6.2^k + 6\right) \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(2^k - 1\right) & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(-2.2^k + 3\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) En déduire que la suite $(a_n(t))$ a une limite $a(t)$ quand $n \to +\infty$ et calculer cette limite.

On a

$$\begin{aligned}
a_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(3.2^k - 2\right) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3e^{2t} - 2e^t \\
b_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(-6.2^k + 6\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -6e^{2t} + 6e^t \\
c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(2^k - 1\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2t} - e^t \\
d_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\left(-2.2^k + 3\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2e^{2t} + 3e^t
\end{aligned}$$

(c) À cause des calculs précédents et par analogie avec la question 2.b., on définit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

i. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R telles que $\exp(tA) = e^{2t}Q + e^tR$

Pour tout/chaque t, on a $\exp(tA) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

ii. Montrer que : $\forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(tA).\exp(sA) = \exp(\ (t+s)A\ )$

Pour tout/chaque t, s, on a

$$\begin{aligned}
\exp(tA).\exp(sA) &= \left(e^{2t}Q + e^tR\right)\left(e^{2s}Q + e^sR\right) \\
&= e^{2(t+s)}Q^2 + e^{2t+s}QR + e^{t+2s}RQ + e^{t+s}R^2
\end{aligned}$$

De plus on a $Q^2 = Q$, $QR = RQ = \mathscr{O}$ et $R^2 = R$

Conclusion : $\exp(tA).\exp(sA) = e^{2(t+s)}Q + e^{t+s}R$
$= \exp(\ (t+s)A\ )$

iii. Montrer que la fonction ϕ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(t) = \exp(tA)$ est injective.

Attention la fonction ϕ n'est pas linéaire
donc on doit utiliser la définition de injectif :

On suppose que $\phi(s) = \phi(t)$

$\boxed{\text{On va montrer que } s = t}$

On a $\phi(s) = \phi(t)$
$\iff \exp(sA) = \exp(tA)$
$\iff e^{2s}Q + e^sR = e^{2s}Q + e^sR$

De plus la famille (Q, R) est libre car $\neq \mathscr{O}$ et non proportionnel, donc on peut identifier les scalaires

Conclusion : On a $e^s = e^t$. On applique $\ln$ ainsi $s = t$. Yes

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Étude d'un exemple si on suppose que l'on a : $n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$
   On effectue la division euclidienne de AP par B, CàD on a $AP = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$
   Vérifier/Justifier que : $Q = X + 1$ et $R = 2X^2 + X$

   On a $A.P = X^4 + X^3 + X^2$

$$\begin{array}{rr|l} & X^4 + X^3 + \ X^2 & X^3 - X \\ & -(X^4 \qquad - \ X^2) & \overline{X+1} \\ \hline & X^3 + 2X^2 & \\ & -(X^3 \qquad -X) & \\ \hline & 2X^2 + X & \end{array}$$

   On a bien $A.P = X^4 + X^3 + X^2 = \underbrace{\left(X^3 - X\right)}_{=B} \underbrace{(X+1)}_{=Q} + \underbrace{2X^2 + X}_{=R}$ et $\deg(R) = 2 < 3 = \deg(B)$

   Conclusion : c'est bien la division euclidienne et $\varphi(P) = R = 2X^2 + X$

2. Dans cette question, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (a) Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

   Lorsque l'on effectue la division euclidienne de AP par B,
   on sait que : $\varphi(P) = R$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n + 1$

   Conclusion : C'est la division euclidienne
   et $\deg\left(\varphi(P)\right) \leqslant n$, CàD $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$

   (b) On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}[X]$.
   Par le théorème de division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times C_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in C[X] \times C_n[X]$ tels que

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 = BQ_2 + R_2 \quad \text{et } \deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(B)$$

   Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A\left(\lambda P_1 + \mu P_2\right)$ par$B$ en fonction de λ, μ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 *en justifiant votre réponse.*

$$\begin{aligned} \text{On a } A\left(\lambda P_1 + \mu P_2\right) &= \lambda AP_1 + \mu AP_2 \\ &= \lambda\left(BQ_1 + R_1\right) + \mu\left(BQ_2 + R_2\right) \\ &= B\left(\lambda Q_1 + \mu Q_2\right) + \left(\lambda R_1 + \mu R_2\right) \end{aligned}$$

   et $\deg\left(\lambda R_1 + \mu R_2\right) \leqslant \max\left(\deg R_1 ; \deg R_2\right) < \deg(B)$

   Conclusion : C'est la division euclidienne et on a Quotient $= \lambda Q_1 + \mu Q_2$
   Reste $= \lambda R_1 + \mu R_2$

   En déduire que φ un endomorphisme de l'espace vectoriel $C_n[X]$.

   On vient de justifier la division euclidienne
   ainsi $\varphi\left(\lambda P_1 + \mu P_2\right) = \lambda \underbrace{R_1}_{\varphi(P_1)} + \mu \underbrace{R_2}_{\varphi(P_2)}$

   Conclusion : φ est linéaire et à valeur dans $\mathbb{C}_n[X]$
   donc φ un endomorphisme de l'espace vectoriel $C_n[X]$

3. *Étude d'un exemple* Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

   (a) Montrer que : $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   On fait les divisions euclidiennes comme à la question Q1

   (b) Calculer $P(X) = \det(X\, I_3 - A)$.

$$\text{On a } P(X) = \det(X\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \cdots$$

   Vérifier que $P(X)$ est un polynôme de degré 3 et que $r = 3$ et $r = -1$ sont ses racines

On a $P(-1)=0$ et $P(3)=0$ donc $r=3$ et $r=-1$ sont des racines de P
De plus $P'(-1)=0$ donc $r=-1$ est une racine double.

Conclusion : Comme $\deg(P)=3$, on a bien toutes les racines et $P(X)=\oplus(X+1)^2(X-3)$

(c) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que $\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(\varphi)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Classique

4. *Étude d'un second exemple* Dans cette partie uniquement, on suppose que

$$n=2, \quad A=A=\alpha+\beta X+\gamma X^2 \quad \text{et} \quad B=X^3$$

(a) Montrer que : $T=\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

On fait les divisions euclidiennes comme à la question Q1

(b) En écrivant $T=D+N$. Calculer T^p.

On a facilement $T=\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{=D}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$

On a aussi $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3=\mathscr{O}$

Conclusion : $$\begin{aligned} T^p &= (D+N)^p \\ &= (\alpha\, I_3+N)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(\alpha\, I_3)^{p-k}N^k \qquad \textit{Binôme valide car } I_3N=NI_3 \\ &= \underbrace{1(\alpha\, I_3)^pN^0}_{k=0}+\underbrace{p(\alpha\, I_3)^{p-1}N^1}_{k=1}+\underbrace{\binom{p}{2}(\alpha\, I_3)^{p-2}N^2}_{k=2}+\mathscr{O}+\cdots+\mathscr{O} \quad \textit{car } N^3=\mathscr{O} \\ &= \alpha^pI_3+p\alpha^{p-1}N+\frac{p(p-1)}{2}\alpha^{p-2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^p & 0 & 0 \\ p\alpha^{p-1}\beta & \alpha^p & 0 \\ p\alpha^{p-1}\gamma+\dfrac{p(p-1)}{2}\alpha^{p-2}\beta^2 & p\alpha^{p-1}\beta & \alpha^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. **Étude du cas où B est scindé à racines simples**

Dans cette partie, on ne suppose plus que le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme de degré $(n+1)$ et qu'il admet $(n+1)$ racines simples.

On note $x_0,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0,\ldots,L_n\in\mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0,\ldots,x_n$ par :

$$\vee k\in[\![0,n]\!], \quad L_k=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{X-x_i}{x_k-x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées : $\forall(k,j)\in[\![0,n\|^2, \quad L_k(x_j)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad j=k \\ 0 & \text{si} \quad j\neq k \end{cases}$

(a) Décomposition avec les polynômes de Lagrange

i. Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0,\ldots,x_n$ sont des racines du polynôme $D=P-\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(x_i)L_i$.

Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $D(x_k) = P(x_k) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x_k)$

$$\begin{aligned} &= P(x_k) - \left(\underbrace{P(x_1) L_1(x_k)}_{i=1} + \cdots + \underbrace{P(x_k) L_k(x_k)}_{i=k} + \cdots \underbrace{P(x_n) L_n(x_k)}_{i=n} \right) \\ &= P(x_k) - (\mathscr{O} + \cdots + P(x_k).1 + \cdots + \mathscr{O}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme$D$.

ii. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

C'est le théorème de rigidité

On a $\deg(D) \leqslant n$ et $(n+1)$ racines donc $D = \mathscr{O}$

iii. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Solution 1

On fait libre (avec la def) + card + dim

Solution 2

La question précédente s'interprète :

$$\mathscr{D} = \mathscr{O} \implies P(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(x_i)}_{scalaire} L_i(X) = CL \in vect(L_0, ..., L_n)$$

Donc la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une famille génératrice $\mathbb{C}_n[X]$

ET il y a théorème qui dit que $(géné + card + dim) \implies Base.$

(b) Réduction de l'endomorphisme φ

i. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

ii. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

On a $A(X).L_k(X) = B(X).Q(X) + R(X)$

On applique l'égalité en x_i, ainsi $A(x_i).L_k(x_i) = B(x_i).Q(x_i) + R(x_i)$

De plus on sait que Si $i = k$, on a $L_k(x_k) = 1$ et $B(x_k) = 0$ (car x_k est une racine de B)
Si $i = k$, on a $L_k(x_i) = 0$ et $B(x_i) = 0$ (car x_i est une racine de B)

On a bien la conclusion attendu

iii. En utilisant $Q.5.a.ii$, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

On sait que $\varphi(L_k) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de $A.Lk$ par B

Comme R est le reste d'une division euclidienne par B, on sait que $\deg(R) \leqslant n$

Comme $\mathbb{R} \in \mathbb{C}_n[X]$, on sait grâce à la question $Q.5.a.ii$ que : $R = \sum_{i=0}^{n} R(x_i) L_i(x_k)$

Ainsi on a $\varphi(L_k) = \sum_{i=0}^{n} R(x_i) L_i = \mathscr{O} + \cdots + \underbrace{A(x_k)}_{L_k} + \cdots + \mathscr{O}$

Conclusion : On a bien pour tout $k \in [\![0, n|\!|$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

iv. Calculer $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$

On a $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k = 0 \, Ł_0 + 0 \, L_1 + \cdots + A(x_k) L_k + \cdots + 0 \, L_n$

$$\text{Conclusion : } A = \begin{pmatrix} A(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(x_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A(x_n) \end{pmatrix}$$