

Exercice 1. [Correction] On se place dans $\mathbb{R}[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} .

On considère un entier $n \geq 1$ et un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ de degré n .

On définit une application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, par $f(P) = Q + XR$

où Q et R sont les quotients et restes de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T .

On note f_n la restriction de f au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Dans cette question on fixe $n = 2$ et $T = X^2$.

Écrire la matrice de f_2 dans la base canonique

Vérifier que f_2 est une symétrie vectorielle.

Préciser par rapport et parallèlement à quels sous-espaces elle s'applique (on fera apparaître une base de chaque sous-espace).

On revient au cas général.

4. Soit P un polynôme.
 - (a) Montrer que $P \in \text{Ker } f$ Ssi il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = (1 - XT)R$.
 - (b) En déduire que $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}_n[X]$.
5. On suppose que : $P \in \text{Ker } f$.
Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket \quad X^k P \in \text{Ker } f$
6. On suppose (dans cette question uniquement) que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul et on note P_0 un polynôme non nul de $\text{Ker } f$ de degré minimal et $d = \deg P_0$.
Ainsi tous les polynômes non nuls de $\text{Ker } f$ sont donc de degrés supérieurs ou égaux à d .
 - (a) Montrer que $d \geq n/2$.
 - (b) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$.
 - (c) Que vaut $\text{rg } f_n$?

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème on choisit $T = X^n$.

7. Soit $P \in \text{Ker } f_n$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$, une racine $n + 1$ -ième de l'unité.
Montrer que α^2 est une racine de P .
8. En déduire que si n est pair alors f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. On suppose que n est impair.
 - (a) Calculer $f_n(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
 - (b) Montrer qu'il existe un polynôme P_0 de degré $(n + 1)/2$ tels que $P_0 \in \text{Ker } f_n$.
 - (c) En déduire $\text{rg } f_n$, puis donner une base de $\text{Im } f_n$.
10. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\text{Ker } f_n \oplus \text{Im } f_n = \mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 2. [Correction] Relation de congruence de Touchard

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k.$$

L'objectif du problème est de montrer que pour tout nombre premier p on a la relation de congruence : $u_p \equiv 2[p]$

1. Vérifier la relation de congruence pour $p \in \{2, 3, 5\}$.
2. Justifier, (sans chercher à la calculer, ce qui sera l'objet de la question 6), qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$
3. Prouver que la fonction f possède un développement limité en 0 à tout ordre.

Pour tout entier naturel n , on note $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ les coefficients du développement limité de la fonction

$$f \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } n+1, \text{ de sorte que } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1}).$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!a_n = u_n$
6. Avec la théorie des EDL1, trouver l'expression de $f(x)$.

On trouve $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{(e^t - 1)}$

7. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^x + \sum_{r=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p)$$

Soit p un nombre premier.

On note \mathcal{A}_p l'ensemble des nombres rationnels r pouvant s'écrire sous la forme $r = c/d$ où c et d sont des entiers et p ne divise pas d .

8. Montrer que $(\mathcal{A}_p, +, \times)$ est un anneau.
9. Montrer qu'il suffit de prouver que $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$ pour établir la relation de congruence définie dans l'introduction.
10. Démontrer la relation de congruence.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Dans cette question on fixe $n = 2$ et $T = X^2$.

Écrire la matrice de f_2 dans la base canonique

Calcul de $f(X^0)$

$$\text{On a } P(X^2) = X^0 = \emptyset X^2 + X^0 \text{ Donc } f(X^0) = \emptyset + X.X^0 = X$$

Calcul de $f(X^1)$

$$\text{On a } P(X^2) = X^2 = 1 X^2 + \emptyset \text{ Donc } f(X^1) = 1 + X.\emptyset = 1$$

Calcul de $f(X^2)$

$$\text{On a } P(X^2) = X^4 = X^2 X^2 + \emptyset \text{ Donc } f(X^2) = X^2 + X.\emptyset = X^2$$

$$\text{Conclusion : } A = \text{Mat}_{(X^0, X^1, X^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que f_2 est une symétrie vectorielle.

Comme $A^2 = I_3$, le morphisme f_2 est une symétrie vectorielle.

Préciser par rapport et parallèlement à quels sous-espaces elle s'applique (on fera apparaître une base de chaque sous-espace).

On sait que f_2 est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G

$$\text{avec } F = \ker(f_2 - id) \text{ et } G = \ker(f_2 + id)$$

$$\text{On résout et on trouve } F = \ker(f_2 - id) = \text{vect}(X^0 + X^1; X^2) \text{ et } G = \ker(f_2 + id) = \text{vect}(X^0 - X^1)$$

On revient au cas général.

4. Soit P un polynôme.

(a) Montrer que $P \in \text{Ker } f$ Ssi il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = (1 - XT)R$.

$$\implies \text{ On suppose que } P \in \ker(f), \text{ on a } Q + XR = 0 \text{ et } P(X^2) = T.Q + R$$

$$\text{Conclusion : } P(X^2) = T.Q + R = T.(-XR) + R = (1 - XT)R$$

$$\impliedby \text{ On suppose qu'il existe } \dots$$

$$\text{On a donc } P(X^2) = (1 - XT)R = -XRT + R \text{ et } \deg(R) < n \deg(T) \text{ donc c'est la division euclidienne}$$

$$\text{Conclusion : } f(P) = Q + XR = (-XR) + XR = \emptyset, \text{ CàD } P \in \ker(f)$$

(b) En déduire que $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}_n[X]$.

On suppose que $P \in \ker(f)$,

$$\text{ainsi il existe un polynôme } R \text{ de degré strictement inférieur à } n \text{ tel que } P(X^2) = (1 - XT)R.$$

$$\text{On sait que : } \deg(P(X^2)) = 2 \deg(P)$$

$$\text{On sait aussi que } \deg(1 - XT) = n + 1 \text{ et } \deg(R) < n$$

$$\text{DONC } \deg[(1 - XT)R] < (n + 1) + n$$

$$\text{Conclusion : } 2 \deg(P) \leq 2n, \text{ CàD } \deg(P) \leq n$$

5. On suppose que : $P \in \text{Ker } f$. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket \quad X^k P \in \text{Ker } f$

Comme $P \in \ker f$, on sait que $P(X^2) = (1 - XT)R$ et $\deg(R) < n$

$$\text{Pour } k, \text{ on a } [X^k P](X^2) = X^{2k} P(X^2) = (1 - XT) X^{2k} R$$

On va justifier que pour $k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket$, $X^{2k} R$ est de degré $< n$

$$\text{Je note } \alpha = \deg(P) \text{ et } r = \deg(R)$$

$$\text{Comme } P(X^2) = (1 - XT)R, \text{ on a } 2\alpha = (n + 1) + r \text{ donc } r = 2\alpha - n - 1$$

$$\text{donc pour } k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket, \deg(X^{2k} R) = r + 2k \leq 2\alpha - n - 1 + 2k$$

$$\leq 2\alpha - n - 1 + 2(n - \alpha) =$$

$$\leq n - 1$$

$$\text{Conclusion : D'après Q4a, on a bien } \forall k \in \llbracket 0; n - \deg P \rrbracket \quad X^k P \in \text{Ker } f$$

6. On suppose (dans cette question uniquement) que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul et on note P_0 un polynôme non nul de $\text{Ker } f$ de degré minimal et $d = \deg P_0$.

Ainsi tous les polynômes non nuls de $\text{Ker } f$ sont donc de degrés supérieurs ou égaux à d .

(a) Montrer que $d \geq n/2$.

On fait un RA. On suppose que $d < n/2$

On a $P_0(X^2) = 2d < n$.

Ainsi la division euclidienne de $P_0(X^2)$ est donc $P_0(X^2) = T \theta + P_0(X^2)$

Conclusion : $f(P_0) = Q + XP_0(X^2) \neq \theta$ OUPS

(b) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$.

> On sait d'après Q..., que le polynôme $X^k P_0 \in \text{Ker}(f)$, donc $\text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d} \subset \text{ker}(f)$.

> L'inclusion réciproque est plus délicate

> Méthode 1. On démontre par récurrence

$H_{<k>}$ Si $P \in \text{ker } f$ et $d \leq \text{deg}(P) \leq k < (n-d-1)$ alors $P \in \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$

Initialisation $k = d$

On suppose $P \in \text{ker } f$ et $d \leq \text{deg}(P) \leq d$

Comme $\text{deg}(P) = \text{deg}(P_0) = d$, on a $P = \sum_{\neq 0} X^d + \dots$ et $P_0 = \sum_{\neq 0} X^d + \dots$

Ainsi $P - \frac{\alpha}{\alpha} P_0$ est une CL donc $\in \text{ker}(f)$ et $\text{deg} < \alpha$

Donc $P - \frac{\alpha}{\alpha} P_0 = \theta$

Conclusion $P = \frac{\alpha}{\alpha} P_0 \in \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$, CàD $H_{<d>}$ est vraie

Hérédité. On suppose $H_{<k>}$

On suppose $P \in \text{ker } f$ et $d \leq \text{deg}(P) \leq k+1$

Comme $\text{deg}(P) \leq (k+1)$, on a $P = a_{k+1} X^{k+1} + \dots$ et $P_0 = \sum_{\neq 0} X^d + \dots$

Ainsi $P - \frac{a_{k+1}}{\alpha} X^{k-d} P_0$ est une CL donc $\in \text{ker}(f)$ et $\text{deg} \leq (k+1)$

Donc d'après $H_{<k>}$, on a $P - \frac{a_{k+1}}{\alpha} X^{k-d} P_0 \in \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$

Conclusion $P \in \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$, CàD $H_{<k+1>}$ est vraie

> Méthode 2.

On suppose que $P \in \text{ker } f$ et $d \leq \text{deg}(P) \leq n-d$

On fait la division euclidienne de P par P_0 , ainsi on a

$$\begin{aligned} P &= P_0.Q + R \\ &= P_0(a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^{p-d}) + R \\ &= a_0 P_0 + a_1 X P_0 + \dots + a_p X^{p-d} P_0 + R \\ \implies R &= P - a_0 P_0 - a_1 X P_0 - \dots - a_p X^{p-d} P_0 \in \text{ker}(f) \end{aligned}$$

Donc $R \in \text{ker } f$ et $\text{deg}(R) < d = \text{deg}(P_0)$ donc $R = \theta$

Conclusion : $P = a_0 P_0 + a_1 X P_0 + \dots + a_p X^{p-d} P_0 \in \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d} \subset \text{ker}(f)$

(c) Que vaut $\text{rg } f_n$?

On sait que $\text{ker}(f_n) = \text{ker}(f) \cap \mathbb{R}_n[X]$ et $\text{ker}(f) \subset \mathbb{R}_n[X]$

Conclusion : $\text{ker}(f_n) = \text{Vect} (X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$

On vérifie facilement que cette famille génératrice est libre (à cause des degrés)

donc c'est une base de $\text{ker}(f_n)$ et $\dim(\text{ker}(f_n)) = n-d+1$.

Conclusion : Avec la formule du rang,

on a $\text{rg } f_n = \dim(\text{Im}(f_n)) = (n+1) - (n-d+1) = d$

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème on choisit $T = X^n$.

7. Soit $P \in \text{Ker } f_n$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$, une racine $n+1$ -ième de l'unité.

Montrer que α^2 est une racine de P .

Comme $P \in \text{ker}(f_n)$, on a $P(X^2) = (1 - XT)R$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } P(\alpha^2) &= (1 - \alpha T(\alpha))R(\alpha) \\ &= (1 - \alpha \alpha^n)R(\alpha) \quad \text{car } T = X^n \\ &= (1 - \alpha^{n+1})R(\alpha) \\ &= 0 \quad \text{car } \alpha \text{ est une racine } (n+1)\text{-ième} \end{aligned}$$

Conclusion : α^2 est une racine de P .

8. En déduire que si n est pair alors f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

difficile

Comme que n est pair, la fonction $h : \mathbb{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A} : \alpha \mapsto \alpha^2$ réalise une bijection de \mathbb{U}_{n+1} sur \mathbb{U}_{n+1} .

Démonstration

> La fonction h est à valeurs dans \mathbb{U}_{n+1} , car

On suppose que $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$, alors on note $\beta = h(\alpha)$

On a bien $\beta^{n+1} = (\alpha^2)^{n+1} = \alpha^{2(n+1)} = (\alpha^{n+1})^2 = 1^2 = 1$

> BONUS si $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$, alors $-\alpha \notin \mathbb{U}_{n+1}$, car

On suppose que $\alpha \in \mathbb{U}_{n+1}$

On a $(-\alpha)^{n+1} = (-1)^{n+1} (\alpha)^{n+1} = (-1)^{\text{impair}} 1 = -1 \neq 1$

> La fonction h est injective car

On suppose que $h(\alpha) = h(\beta)$

On a donc $\alpha^2 = \beta^2 \implies \beta = \alpha$ OU $\beta = -\alpha$

MAIS $\beta \in \mathbb{U}_{n+1}$ et $-\alpha \notin \mathbb{U}_{n+1}$ donc $\beta = -\alpha$ est impossible

Donc $\beta = \alpha$

> Enfin la fonction est bijective

h est injective de \mathbb{U}_{n+1} sur \mathbb{U}_{n+1} et cardinal de \mathbb{U}_{n+1} est fini égale à $(n+1)$

Conclusion : la fonction h est bien bijective.

Ainsi toutes les nombres de \mathbb{U}_{n+1} sont bien des racines de P

Soit $P \in \ker(f_n)$, alors P est de degré $\leq n$ et admet $(n+1)$ racines donc $P = \mathcal{O}$

Conclusion : f_n est injective et c'est une endo en dimension finie

Donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. On suppose que n est impair.

(a) Calculer $f_n(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Si $k \in \{0, 1, \dots, n-1/2\}$ alors $P(X^2) = X^{2k} = X^n \mathcal{O} + X^{2k}$ et $f(X^k) = \mathcal{O} + X \cdot X^{2k} = X^{2k+1}$

Si $k \in \{n+1/2, \dots, X^n\}$ alors $P(X^2) = X^{2k} = X^n X^{2k-n} + \mathcal{O}$ et $f(X^k) = X^{2k-n} + X \cdot \mathcal{O} = X^{2k-n}$

(b) Montrer qu'il existe un polynôme P_0 de degré $(n+1)/2$ tels que $P_0 \in \text{Ker } f_n$.

Même si ça n'est pas facile à voir : $f(X^{(n+1)/2}) = X^1$ et $f(X^0) = X^1$

Donc $X^{(n+1)/2} - 1 \in \ker(f_n)$

(c) En déduire $\text{rg } f_n$, puis donner une base de $\text{Im } f_n$.

D'après la question ..., on sait que $\text{rg } f_n = d = \frac{n+1}{2}$

Et on a $\text{Im}(f_n) = \text{vect}(L' \text{image d'une base}) = \text{vect}(X^{\text{impair}})$

10. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\text{Ker } f_n \oplus \text{Im } f_n = \mathbb{R}_n[X]$?

Si/lorsque n est pair, f_n est un automorphisme, donc $\text{Ker } f_n \oplus \text{Im } f_n = \mathbb{R}_n[X]$

Si/lorsque n est impair, on sait

$\text{Im}(f_n) = \text{vect}(X^{\text{impair}})$ et $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^k P_0)_{0 \leq k \leq n-d}$

On pourra vérifier que :

$\text{Im}(f_n) \cap \ker(f_n) = \{\mathcal{O}\} \iff P_0 = X^{(n+1)/2} - 1 = X^{\text{pair}} - 1 \iff n \equiv 3 \pmod{4}$

Conclusion : $\text{Ker } f_n \oplus \text{Im } f_n = \mathbb{R}_n[X] \iff n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k.$$

L'objectif du problème est de montrer que pour tout nombre premier p on a la relation de congruence : $u_p \equiv 2[p]$

1. Vérifier la relation de congruence pour $p \in \{2, 3, 5\}$.

C'est du calcul.

$$\text{On a } u_1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} u_k = u_0 = 1$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} u_k = u_0 + u_1 = 2 \quad \text{On a bien } u_2 = 2 \equiv 2[2]$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} u_k = u_0 + 2u_1 + u_2 = 5 \quad \text{On a bien } u_3 = 5 \equiv 2[3]$$

2. Justifier, (sans chercher à la calculer, ce qui sera l'objet de la question 6), qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$

La fonction f est solution du problème de Cauchy donc on sait que

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$

3. Prouver que la fonction f possède un développement limité en 0 à tout ordre.

La fonction f est solution d'une équation EDL1 donc elle est dérivable.

On fait par récurrence $H_{<n>}$: la fonction f est \mathcal{C}^n

À finir c'est dans le cours

Pour tout entier naturel n , on note $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ les coefficients du développement limité de la fonction f en

0 à l'ordre $n+1$, de sorte que $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1})$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$

Question délicate

> On commence par le thm de pseudo dérivation des DL

Les fonctions f et f' sont \mathcal{C}^∞ donc avec Taylor-Young, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k+1)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

D'après le texte $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, ainsi $f^{(k+1)}(0) = (k+1)!a_{k+1}$

$$\text{Conclusion : } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot a_{k+1} x^k + o(x^n)$$

Attention magie : On n'a pas dérivée le DL de f pour obtenir le DL de f' .

On sait grâce à Taylor-Young que les DL de f et f' existent et ont une certaine forme ET il y a unicité

Donc en identifiant, on constate que c'est comme si on avait dérivé (magique)

> On poursuit avec calcul/Equa Diff + unicité

On sait que $f'(x) = e^x f(x)$.

On a

$$> \text{D'une part. } f'(x) = \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot a_{k+1} x^k + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} > \text{D'autre part. } e^x f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right) (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)) \\ &= \dots + x^n \left[a_n + \frac{1}{1!} a_{n-1} + \frac{1}{2!} a_{n-2} + \dots + \frac{1}{n!} a_0 \right] + o(x^n) \end{aligned}$$

Conclusion : par unicité du DL,

$$\text{on a : } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{1!}a_{n-1} + \frac{1}{2!}a_{n-2} + \dots + \frac{1}{n!}a_0 = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$$

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!a_n = u_n$

On dispose de relation de récurrence

donc On fait par récurrence $H_{<n>} : n!a_n = u_n$

6. Établir par le calcul l'expression exacte de la fonction f .

La fonction f est solution de l'EDL1 : $y' - e^x y = 0$

Comme $A(t) = -e^t$ est une primitive (sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$) de $a(t) = -e^t$,

on sait que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K e^{-A(t)} = K e^{(e^t)}$ avec $K \in \mathbb{R}$

De plus $f(0) = 1 = K e^1 = K.e$.

$$\text{Conclusion : } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K e^{-A(t)} = \frac{1}{e} e^{(e^t)} = e^{(e^t-1)}$$

7. Montrer que pour tout entier $p \geq 2, f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^x + \sum_{r=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p)$

À méditer

On fait le DL de façon classique et "pas classique"

$$\text{On a } f(x) = e^{(e^x-1)} = e^{\square} = \sum_{k=0}^p \frac{\square^k}{k!} + o(\square^p)$$

$$\square = e^x - 1 = x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\square^2 = (e^x - 1)^2$$

⋮

$$\square^p = (x + o(x))^2 = x^p + o(x^p)$$

$$o(\square^p) = o(x^p)$$

$$\text{Conclusion : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \underbrace{e^x - 1}_{k=1} + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} + \underbrace{x^p + o(x^p)}_{k=p} + o(x^p)$$

Soit p un nombre premier.

On note \mathcal{A}_p l'ensemble des nombres rationnels r pouvant s'écrire sous la forme $r = c/d$ où c et d sont des entiers et p ne divise pas d .

8. Montrer que $(\mathcal{A}_p, +, \times)$ est un anneau.

C'est du cours

Conclusion : \mathcal{A}_p contient 0 et 1 est stable par addition, soustraction et produit

9. Montrer qu'il suffit de prouver que $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$ pour établir la relation de congruence définie dans l'introduction.

On suppose que $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$

On va montrer que $u_p \equiv 2[p]$

Comme $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$, on peut écrire $\frac{u_p - 2}{p!} = \frac{a}{b} \in \mathcal{A}_p$

Ainsi $(u_p - 2).b = a.p!$ donc p divise $(u_p - 2).b$

De plus $\frac{a}{b} \in \mathcal{A}_p$ donc p ne divise pas b et p est premier

On sait (ou pas) que : p ne divise pas b et p est premier

Donc p est premier avec b

Conclusion : p divise $(u_p - 2).b$ et p est premier avec b
donc (thm de Gauss) p divise $(u_p - 2)$

10. Démontrer la relation de congruence.

difficile

On va montrer que : $\frac{u_p - 2}{p!} \in \mathcal{A}_p$

Soit p un nombre premier.

> D'une part. On sait que $\frac{u_p}{p!} = a_p$ et que $f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o(x^p)$

Ainsi $a_p = \frac{u_p}{p!}$ c'est coefficient de x^p dans le DL de $f(x)$

> D'autre part. On a

$$\begin{aligned} f(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} e^x + \sum_{r=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p) \\ & = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p) \right] + \sum_{r=2}^{p-1} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} + \frac{x^p}{p!} + o(x^p) \end{aligned}$$

On note u_r le coefficient de x^p dans le DL de $\frac{(e^x - 1)^r}{r!}$

$$= \dots + x^p \left[\frac{1}{p!} + \left(\sum_{r=2}^{p-1} u_r \right) + \frac{1}{p!} \right] + o(x^p)$$

On a donc $\frac{u_p}{p!} = \frac{1}{p!} + \left(\sum_{r=2}^{p-1} u_r \right) + \frac{1}{p!} \iff \frac{u_p - 2}{p!} = \sum_{r=2}^{p-1} u_r$

On va montrer que $\sum_{r=2}^{p-1} u_r \in \mathcal{A}_p$

On sait que : $(\mathcal{A}_p, +, \times)$ est un anneau, ainsi

- L'ensemble \mathcal{A}_p est stable par CL avec des scalaire dans \mathcal{A}_p et par produit.
- $\mathcal{A}_p[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficient dans \mathcal{A}_p est stable par CL avec des scalaire dans \mathcal{A}_p et par produit

On a maintenant

$$\begin{aligned} e^x - 1 & \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + o(x^{p-1}) = \underbrace{P(x)}_{\in \mathcal{A}_p[X]} + o(x^{p-1}) \\ (e^x - 1)^2 & \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{P(x)^2 + 2P(x) \cdot o(x^{p-1}) + o(x^{2p-2})}_{=o(x^p) \text{ car } P(x) \sim x}_{\in \mathcal{A}_p[X]} = \underbrace{P^2(x)}_{\in \mathcal{A}_p[X]} + o(x^p) \end{aligned}$$

Donc $u_2 \in \mathcal{A}_p$

De même $(e^x - 1)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{P^3(x)}_{\in \mathcal{A}_p[X]} + o(x^p)$

Donc $u_3 \in \mathcal{A}_p$

De même $u_4, \dots, u_{r-1} \in \mathcal{A}_p$

Conclusion : $\frac{u_p - 2}{p!} = \sum_{r=2}^{p-1} u_r \in \mathcal{A}_p$ Yes