Exercice 1. [Correction]

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coéfficients réels.
On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } A^p = 1\}.$$

On notera $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ donc $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et id l'identité de $\mathbb{R}^2$.

On poura utiliser la propriété classique : $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

Partie I. Généralité.

1. $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Partie II. Etude de $\mathcal{R}_2(2)$.

1. Que signifie $A \in \mathcal{R}_2(2)$.
2. Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$.
   Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Montrer que $\ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) = \mathbb{R}^2$.
   (b) Calcul d'une dimension.
      i. Démontrer par un RA que $\dim\ker(u - id) \neq 2$ et par un RA que $\dim\ker(u - id) \neq 0$
      ii. En déduire que $\dim\ker(u - id) = \dim\ker(u + id) = 1$
   (c) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathcal{M}at_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire avec les formules de changement de base, qu'il existe quatre réels a, b, c et d tel que $ad - bc \neq 0$ et

$$A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}$$

Partie III. Étude de $\mathcal{R}_2(3)$.

Soit M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$

Soit v l'endomorphisme canonique associé à M

ainsi v est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v) = M$.

On considère les ssev $F = \ker(v - id)$ et $G = \ker\left(v^2 + v + id\right)$.

1. Traduire $M \in \mathcal{R}_2(3)$.
2. Un somme directe.
   (a) Montrer que $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$.
   (b) Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que
   $$\frac{1}{3}\left[\vec{x} + v(\vec{x}) + v^2(\vec{x})\right] \in F \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left[2\vec{x} - v(\vec{x}) - v^2(\vec{x})\right] \in G.$$
   (c) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^2$.

   On a donc $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
3. On suppose que $\dim F = 2$.

   Montrer que $M = I_2$
4. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que $\dim F = 1$.
   (a) Calculer $\dim G$.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que F soit la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{g_1}$ et G soit la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{g_2}$.
   (c) Montrer $v(\overrightarrow{g_2}) \in G$.
   (d) En considérant le vecteur $\overrightarrow{g_2} + v(\overrightarrow{g_2}) + v^2(\overrightarrow{g_2})$, obtenir une contradiction.
5. On suppose dans cette question que $\dim F = 0$.
   (a) Montrer que $\left[\overrightarrow{i}, v\left(\overrightarrow{i}\right)\right]$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que
   $$M = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) **Partie I. Généralité.**

1. $\mathcal{R}_n(p)$ n'est pas une ss-ev car $\vec{0}$ n'est pas dans $\mathcal{R}_n(p)$.
2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Comme $AA^{p-1} = A^{p-1}A = A^p = I_n$, A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$. De plus

$$\left(A^{p-1}\right)^p = (A^p)^{p-1} = I^{p-1} = I$$

   Donc $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. On a facilement

$$\left(P^{-1}AP\right)^p = P^{-1}AP.P^{-1}AP....P^{-1}AP = P^{-1}A^pP = P^{-1}P = I$$

   Donc $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

   On a de plus

$$\begin{cases} x^p = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ si } p \text{ est impair et } x = \pm 1 \text{ si } p \text{ est pair}$$

   $\rightarrow$ **Si p est impair**, on a forcément $\lambda_i = 1 \Rightarrow$ il y a une unique possibilité $A = I_n$ donc

$$card\left(\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})\right) = 1$$

   $\rightarrow$ Si p est pair, on a forcément $\lambda_i = \pm 1 \Rightarrow$ il y a 2 possibilités pour **Chaque** λ_i ainsi

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

   donc $card\left(\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})\right) = 2^n$.

Partie II. Etude de $\mathcal{R}_2(2)$.

1. On a $A \in \mathcal{R}_2(2)$ Ssi A est une matrice 2×2 avec $A^2 = I_2$
2. Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$.
   Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Comme $A \in \mathcal{R}_2(2)$, on a $A^2 = I_2$ donc u est une symétrie, d'où le résultat.
   (b) Calcul d'une dimension.
      i. Si $\dim(\ker(u - id)) = 2 \Rightarrow \ker(u - id) = \mathbb{R}^2$ donc $u = id \Rightarrow A = I_2$ absurde.
      ii. On a de même $\dim(\ker(u + id)) = 2$.
      Comme $\ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) = \mathbb{R}^2$, on a avec Grassman

$$\left.\begin{array}{r} \dim\ker(u - Id_E) + \dim\ker(u + Id_E) = 2 \\ \\ \dim(\ker(u - id)) \leqslant 1 \text{ et } \dim(\ker(u + id)) \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(u - id)) = \dim(\ker(u + id)) = 1$$

   (c) Comme $\dim(\ker(u - id)) = 1$, on prend une base $\overrightarrow{e_1}$ de $\ker(u - id)$.
   De même $\overrightarrow{e_2}$ est une base de $\ker(u - id)$.
   On sait que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) = \mathbb{R}^2$.
   On a facilement avec les décoration

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d) On note $\mathcal{C}$ la base précédemment construite et on a

$$\begin{aligned} A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) &= \mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C})\, \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u)\, \mathcal{M}at(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

   On note $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Comme $P = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, P est inversible et on a

$$ad - cb <> 0 \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ac \\ 2bd & -ad - bc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

Partie III. Etude de $\mathcal{R}_2(3)$.

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$, et v un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \ker(v - Id_E) \quad \text{et} \quad G = \ker\left(v^2 + v + Id_E\right).$$

1. On $M \in \mathcal{R}_2(3)$ Ssi M est une matrice 2×2 avec $M^3 = I_2$
2. Un somme directe.
   (a) Soit $\vec{x} \in F \cap G$
   $$\left.\begin{array}{r} \vec{x} \in F \Rightarrow v(x) = x \\ \vec{x} \in G \Rightarrow \left(v^2 + v + Id_E\right)(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ... \Rightarrow x = 0.$$
   (b) Soit $x \in E$. On pose $f = \dfrac{1}{3}\left[x + v(x) + v^2(x)\right]$ et $g = \dfrac{1}{3}\left[2x - v(x) - v^2(x)\right]$.
   Comme $v \in \mathcal{R}_2(3)$, i.e. $v^3 = id$, on a
   $$(v - Id_E)(f) = ... = 0 \quad \text{et} \quad \left(v^2 + v + Id_E\right)(g) = ... = 0$$
   (c) Soit $x \in E$.
   $\rightarrow$ Comme $F \cap G = \left\{\vec{0}\right\}$ la somme est directe.
   $\rightarrow$ Avec les notations de la question précédente, $x = f + g \Rightarrow F \widehat{+} G = \mathbb{R}^2$.
3. Si F est de dimension $2 \Rightarrow \ker(v - id) = F = \mathbb{R}^2$ donc $v - id = \hat{0}$, i.e. $v = id$ et $M = I_2$
4. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.
   (a) Comme $F \oplus G = \mathbb{E}_2$, on a avec la formule de grassmann $\dim G = 1$.
   (b) Soit g_1 une base de F et g_2 une base de G.
   Comme $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, on sait que $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ est une base de $\mathbb{E}_2$.
   (c) Comme $g_2 \in G = \ker\left(v^2 + v + Id_E\right)$, on a
   $$\left(v^2 + v + Id_E\right)(g_2) = g_2 + v(g_2) + v^2(g_2) = 0$$
   On a de plus
   $$\begin{aligned} \left(v^2 + v + Id_E\right)[v(g_2)] &= v^3(g_2) + v^2(g_2) + v(g_2) \\ &= g_2 + v^2(g_2) + v(g_2) = 0 \end{aligned}$$
   Donc $v(g_2) \in G$.
   (d) Or g_2 est une base de G donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(g_2) = \lambda g_2$. Ainsi
   $$\begin{aligned} g_2 + v(g_2) + v^2(g_2) &= g_2 + \lambda g_2 + \lambda^2 g_2 \\ &= \underbrace{\left(1 + \lambda + \lambda^2\right)}_{\neq 0 \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}.} g_2 \neq \vec{0} \quad \text{absurde.} \end{aligned}$$

5. On suppose dans cette question que F est de dimension 0.

$$\text{On a donc } \dim G = 2 \text{ ainsi } G = \mathbb{R}^2$$

(a) Montrons par l'absurde que $\left[\overrightarrow{i}, v\left(\overrightarrow{i}\right)\right]$ est libre.

On suppose que $\left[\overrightarrow{i}, v\left(\overrightarrow{i}\right)\right]$ est liée

$$\left[\overrightarrow{i}, v\left(\overrightarrow{i}\right)\right] \text{ est liée} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } v\left(\overrightarrow{i}\right) = \alpha.\overrightarrow{i}.$$

Comme $G = \mathbb{R}^2$, on a $\overrightarrow{i} \in G$ d'où

$$0 = \overrightarrow{i} + v\left(\overrightarrow{i}\right) + v^2\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{i} + \alpha^2\overrightarrow{i} = \underbrace{\left(1+\alpha+\alpha^2\right)}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \in \mathbb{R}.}\overrightarrow{i} \neq 0 \text{ absurde.}$$

Conclusion : Libre $\oplus$ cardinal $\Rightarrow$ base.

(b) On écrit maintenant la matrice de v dans $\mathcal{C} = \left[\overrightarrow{i}, v\left(\overrightarrow{i}\right)\right]$.

Comme $\overrightarrow{i} \in G$, on a $\overrightarrow{i} + v\left(\overrightarrow{i}\right) + v^2\left(\overrightarrow{i}\right) = 0$, donc on a

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de changement de base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $P = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$\text{Comme } P \text{ est inversible, } b \neq 0 \text{ et } P^{-1} = \mathcal{M}at(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) &= \mathcal{M}at(\mathcal{B} \to \mathcal{C})\,\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u)\,\mathcal{M}at(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$