

Exercice 1. [Correction]

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ une base de E .

1. Soit s l'endomorphisme E vérifiant

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(s) = S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que s est une symétrie.

En déduire que la matrice S est inversible et déterminer S^{-1} .

(b) On considère les vecteurs

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \quad \vec{f}_4 = \vec{e}_2 - \vec{e}_4$$

i. Écrire $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$. En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ est une base de E .

ii. Calculer $s(\vec{f}_1)$. En déduire $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(s)$.

2. Soient a et b deux réels. On note $u_{a,b}$ l'endomorphisme de E telle que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_{a,b}) = M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On considère $e'_i = s(e_i)$.

On note $\mathcal{D} = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ et $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})$, la matrice de passage.

Justifier que : $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) = S$

Justifier que la famille \mathcal{D} est une base de E .

(b) Justifier que : $u_{a,b}(e'_1) = (a+b)^2 e'_1 + 0 e'_2 + 0 e'_3 + 0 e'_4$

(c) En déduire que : $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b}) = D(a,b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.

(d) Donner le lien entre les matrices $M(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_{a,b})$ et $D(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b})$

3. Inversibilité.

(a) Discuter selon a, b si la matrice $D(a,b)$ est inversible.

(b) Lorsque la matrice $D(a,b)$ est inversible,

exprimer $D(a,b)^{-1}$ en fonction de $D(a,-b)$ puis sous la forme $D(\square, \Delta)$

(c) Discuter quand $M(a,b)$ est inversible.

lorsque $M(a,b)$ est inversible, montrer qu'il existe u et v tel que $[M(a,b)]^{-1} = M(u,v)$.

4. Produit.

(a) Déterminer a'', b'' tel que $D(a,b) \cdot D(a', b') = D(a'', b'')$.

(b) En déduire que l'ensemble des matrices de forme $M(a,b)$ est stable par produit.

Exercice 2. [Correction]

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels

Partie A : Changement de base et une application sympa.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note h_A avec l'endomorphisme associé à la matrice A , ainsi $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_A)$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ tel que

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. On suppose que M est une matrice 3×3 telle que $M^2 = A$.

On note h_M avec l'endomorphisme associé à la matrice M .

- (a) Montrer que : $AM = MA$ puis que $M\vec{C}_1 \in \ker(h_A - id)$

et enfin qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M\vec{C}_1 = a\vec{C}_1$.

- (b) Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h_M) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

- (c) Justifier que $(M')^2 = D$. Déterminer M' .

- (d) Combien l'équation $X^2 = A$ a-t-elle de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Parmi toutes les solutions y-a-t-il une solution remarquable que l'on pourrait appelé \sqrt{A} ?

Partie B : Autour des polynômes.

On note : $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

$\mathcal{B} = (X^0, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère les polynômes $P_1 = \frac{1}{8}(X-3)(X-5)$

$$P_2 = \frac{-1}{4}(X-1)(X-5)$$

$$P_3 = \frac{1}{8}(X-1)(X-3)$$

1. (a) Vérifier que $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Et montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3$

- (b) On note Q la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{P} .

Justifier que Q est inversible et, **en utilisant la question précédente**, déterminer son inverse Q^{-1} .

2. On pose $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$

Pour tout polynôme de $P \in \mathbb{R}[X]$,

on note P^* le reste de la division euclidienne de P par P_0

On considère f la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P^*$.

- (a) Déterminer l'ensemble d'arrivée \mathcal{A} de f et démontrer que f est linéaire.

- (b) Démontrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = P(1)P_1 + P(2)P_2 + P(3)P_3$

Partie C : Application aux calculs matriciels.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit E l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA + cA^2$.

Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer la dimension de E .

2. Pour tout polynôme $P = a + bX + cX^2$, on pose $P(A) = aI + bA + cA^2$ et on note Φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E définie par $\Phi(P) = P(A)$.

Démontrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. On pose $B_i = P_i(A)$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Pour répondre à cette question, on utilisera les résultats de la partie A

(a) Vérifier que : $(A - I_3)(A - 3I_3)(A - 5I_3) = \mathcal{O}$

(b) En utilisant QB1a., exprimer I , A et A^2 en fonction de B_1 , B_2 et B_3 .

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de B_1 , B_2 et B_3 .

Exercice 3.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ possède au moins une matrice inversible.

Rappels et Notations

- > n est un entier, $n \geq 2$
- > On note $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels
 - Les éléments de E sont notés $M = (m_{ij})$.
 - La matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, qui vaut 1.
 - E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n^2 et les matrices $(E_{i,j})$ forment la base canonique.
 - Si $M \in E$, on note $\text{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M
 - Lorsque A et B sont des éléments de E , on note $A.B$ leur produit.
 - Lorsque $A \in E$, la matrice A^T désigne la matrice transposée
- > Un hyperplan de E est ssev de dimension $n^2 - 1$.
- > On rappelle qu'une forme linéaire sur E est un morphisme de E à valeur dans \mathbb{R}
- > On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, l'ensemble des formes linéaires sur E
On rappelle que : E^* est un espace vectoriel et que $\dim(E^*) = \dim(E)$.
- > Si $M = (m_{ij}) \in E$, on définit la trace de M , notée $T(M)$, par le réel $T(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk}$.
On définit la fonction T de E à valeurs dans \mathbb{R} par $T : M \mapsto T(M)$.
- > À chaque matrice U de E , on associe :
 - La fonction T_U de E à valeurs dans \mathbb{R} par $T_U : M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.
 - L'ensemble $H_U = \{M \in E \text{ tel que } T_U(M) = T(U.M) = 0\}$.

Partie I : Généralités, exemples.

1. Quelques propriétés.
 - (a) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^* , CàD la fonction T_U est une forme linéaire.
 - (b) Soit $U \in E$. Montrer que $H_U = \ker T_U$. Est ce que H_U est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Dans cette question seulement, on prend $n = 2$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ un élément de E

- (a) Calculer $T(U.M)$. Trouver une matrice M de E telle que $T(U.M) \neq 0$
En déduire la dimension de $\text{Im}(T_U)$ et enfin justifier que H_U est un hyperplan.
- (b) Déterminer une base de H_U .
- (c) Vérifier que H_U possède une matrice inversible.

Partie II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit U dans E .
 - (a) On note \mathcal{O} est la matrice nulle (de taille n). Déterminer $H_{\mathcal{O}}$ et $\dim H_{\mathcal{O}}$.
 - (b) On suppose que $U = (u_{ij})$ n'est pas la matrice nulle
 - i. Calculer $T_U(U^T) = \text{tr}(U \cdot U^T)$.
 - ii. En déduire que la forme linéaire T_U n'est pas la fonction nulle.
En déduire $\dim H_U$.
2. On considère l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$
 - (a) Montrer que φ est un morphisme.
 - (b) Montrer que φ est un isomorphisme de E sur E^* .
3. On considère un hyperplan vectoriel H de E .
 - (a) Justifier qu'il existe A , une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H .
puis montrer que : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.
 - (b) Construire alors un élément h de E^* tel que $H = \ker h$.
 - (c) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

Partie III : Le résultat général

Pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{ij})$ avec $\begin{cases} p_{i+1,i} = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1,n} = 1 \\ p_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Vérifier que P est inversible et que P appartient à l'hyperplan H_{R_r} .

2. On admet que Lorsque $H = H_U$, avec U de rang r ,
alors il existe deux matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R_r$.
Montrer que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.

Exercice 4. [Correction]

Rappels et Notations

- > n est un entier, $n \geq 2$
- > On note $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On sait que E_n est de dimension n et que $\mathcal{B} = \left((E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \right)$ est sa base canonique.
- > Le symbole de Kronecker $\delta_{j,k}$ est définie par
$$\begin{cases} \delta_{j,k} = 0 \text{ lorsque } k \neq j \\ \delta_{j,k} = \delta_{j,j} = 1 \text{ lorsque } k = j \end{cases}$$

On rappelle que : $\forall (i, j, k, \ell) \in [1, n]^4$, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$
- > On note \mathcal{O}_n la matrice nulle et I_n la matrice identité.
- > Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice,
 $\text{tr}(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M .
- > On dira qu'une matrice M de E_n est nilpotente s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = \mathcal{O}_n$.
Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de \mathcal{B} est nilpotente.
- > On dira qu'un sous-espace V de \mathbb{R}^n est stable pour une matrice A de E_n si : $\forall \vec{X} \in V, A\vec{X} \in V$.
- > Un hyperplan de E_n est un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$.

1. Quelques propriétés CàD quelques questions de cours.

(a) Il est rappelé que : $\forall (i, j, k, \ell) \in [1, n]^4$, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$
Démontrer cette propriété.

(b) Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique \mathcal{B} .

(c) Soit N une matrice nilpotente et $\lambda \neq 0$
Montrer que la matrice $\lambda I_n + N$ est inversible.

(d) On suppose que H est un hyperplan et que $A \in E_n$ est une matrice avec $A \notin H$
Démontrer que : $E_n = H \oplus \text{Vect}(A)$.

2. Soit H un hyperplan de E_n .

On suppose que H ne contient pas de matrice inversible.

(a) Montrer que : $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

En déduire que : Si N est une matrice nilpotente alors $N \in H$

(b) On considère la matrice $R = \left(\sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} \right) + E_{n,1} = E_{1,2} + E_{2,3} + \dots + E_{n-1,n} + E_{n,1}$

Montrer que la matrice R est inversible et la matrice R appartient à H .

(c) Que peut-on conclure.

3. Soit H un hyperplan de E_n stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que : $\forall (A,B) \in H^2, A.B \in H$

On suppose que : $I_n \notin H$

(a) Justifier que H et $\text{Vect}(I_n)$ sont deux sous-espace vectoriel supplémentaire de E_n

On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H .

(b) Prouver que l'on a : $\forall (M,N) \in E_n^2, p(MN) = p(M)p(N)$.

(c) Démontrer que : $\forall M \in E_n, M^2 \in H \implies M \in H$.

(d) Prouver alors que : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_{i,j} \in H$.

(e) Que peut-on conclure ?

4. Soit H un hyperplan de E_n stable pour la multiplication des matrices.

On suppose que $n \geq 3$

On admet qu'il existe une matrice $A \neq \mathcal{O}$ tel que

> Pour tout $M \in E_n$: $M \in H \iff \text{tr}(A^T M) = 0$

Et

> pour tout $M \in H, \text{tr}(U.M) = 0$ alors $U = \lambda A^T$

(a) Justifier que pour tout $B \in H, BA^T$ est colinéaire à A^T .

(b) Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

(c) Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par $W = \text{Im}(A^T)$, .

Montrer que W est stable pour tous les éléments de H .

(d) On suppose que

p le rang de la matrice A^T

(e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Im}(A^T)$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n

P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \mathcal{B}_1 .

Montrer que l'application $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$ est un automorphisme de E_n .

(e) En déduire que l'on a : $\dim(H) \leq n^2 - p(n-p)$.

(f) En déduire une absurdité. Que peut-on conclure.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Soit s l'endomorphisme E vérifiant $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que s est une symétrie, CàD que $s \circ s = id$.

On a facilement

$$S^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $S^2 = I_4$, on a $s^2 = id \implies s \circ s = id$ donc s est une symétrie.

Déterminer, sans calcul ou presque, la matrice S^{-1} .

Comme S est carrée et $S.S = I_4$, on sait que S est inversible et $S^{-1} = S$.

(b) On considère les vecteurs

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \quad \vec{f}_4 = \vec{e}_2 - \vec{e}_4$$

i. Écrire $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$.

Avec les nouvô en hô, on a $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ est une base de E .

On a $\det(f_1, f_2, f_3, f_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 6 \neq 0$

donc la matrice de passage est inversible donc (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E .

ii. Calculer $s(\vec{f}_1)$. En déduire $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(s)$.

On a

$$s(f_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{f}_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{f}_1$$

Pour calculer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(s)$, il faut calculer $s(f_1), s(f_2), \dots$ dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) .

$$s(f_1) = \vec{f}_1 = 1\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2 + 0\vec{f}_3 + 0\vec{f}_4 \quad s(f_2) = \vec{f}_2 = 0\vec{f}_1 + 1\vec{f}_2 + 0\vec{f}_3 + 0\vec{f}_4$$

$$s(f_3) = -\vec{f}_3 = 0\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2 + (-1)\vec{f}_3 + 0\vec{f}_4 \quad s(f_4) = -\vec{f}_4 = 0\vec{f}_1 + 0\vec{f}_2 + 0\vec{f}_3 + (-1)\vec{f}_4$$

$$\text{Conclusion } D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Soient a et b deux réels. On note $u_{a,b}$ l'endomorphisme de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{a,b}) = M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On considère $e'_i = s(e_i)$.

On note $\mathcal{D} = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ et $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})$, la matrice de passage.

Justifier que : $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) = S$

On a facilement

$$s(e_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{f}_1) = S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 \text{ le premier vecteur de la matrice } S$$

De même on calcule $s(e_2), \dots$

Conclusion : $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) = S$

Justifier que la famille \mathcal{D} est une base de E .

La matrice de passage $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})$ est inversible donc la famille \mathcal{D} est une base de E .

(b) Justifier que : $u_{a,b}(e'_1) = (a+b)^2 e'_1 + 0 e'_2 + 0 e'_3 + 0 e'_4$

$$\text{On a } u_{a,b}(e'_1) = \frac{1}{2} M(a,b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^2 + ab + ab + b^2 \\ a^2 + ab + ab + b^2 \\ a^2 + ab + ab + b^2 \\ a^2 + ab + ab + b^2 \end{pmatrix} = \frac{(a+b)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) e'_1$$

Conclusion : $u_{a,b}(e'_1) = (a+b)^2 e'_1 + 0 e'_2 + 0 e'_3 + 0 e'_4$

(c) En déduire que : $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b}) = D(a,b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.

On a de même $u_{a,b}(e'_2) = (a-b)^2 e'_2$, $u_{a,b}(e'_3) = (a^2 - b^2) e'_3$, $u_{a,b}(e'_4) = (a^2 - b^2) e'_4$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b}) = D(a,b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

(d) Donner le lien entre les matrices $M(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_{a,b})$ et $D(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b})$

Les formules de changement de base assurent que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b}) = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_{a,b}) \mathcal{M}at(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B})$$

De plus $\mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) = S$ et $\mathcal{M}at(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}) = S^{-1} = S$

Conclusion : $M(a,b) = S.D(a,b).S$

3. Inversibilité.

(a) Discuter selon a,b si la matrice $D(a,b)$ est inversible.

La matrice $D(a,b)$ est inversible Ssi $\det = 0$

On sait que $\det(D(a,b)) = (a+b)^2(a-b)^2(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a+b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b \\ (a-b)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a-b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \\ a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq b^2 \Leftrightarrow [a \neq -b \text{ et } a \neq b] \end{cases}$$

Conclusion : la matrice $D(a,b)$ est inversible Ssi $a \neq \pm b$

(b) Lorsque la matrice $D(a,b)$ est inversible, exprimer $D(a,b)^{-1}$ en fonction de $D(a,-b)$ puis sous la forme $D(\square, \Delta)$

On a $D(a,b).D(a,-b) = \dots = (a^2 - b^2)^2 I_4$

Conclusion : Lorsque $a \neq \pm b$, la matrice $D(a,b)$ est inversible

$$\text{Et on a } a^2 - b^2 \neq 0 \text{ et } D(a,b)^{-1} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} D(a,-b) = D\left(\frac{a}{(a^2 - b^2)^2}, \frac{-b}{(a^2 - b^2)^2}\right)$$

(c) Discuter quand $M(a,b)$ est inversible.

lorsque $M(a,b)$ est inversible, montrer qu'il existe u et v tel que $[M(a,b)]^{-1} = M(u,v)$.

Comme $M(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_{a,b})$ et $D(a,b) = \mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u_{a,b})$

$$M(a,b) \text{ est inversible Ssi } a \neq \pm b \text{ et } M(a,b)^{-1} = M(u,v) \text{ avec } u = \frac{a}{(a^2 - b^2)^2} \text{ et } v = \frac{-b}{(a^2 - b^2)^2}$$

4. Produit.

(a) Déterminer a'', b'' tel que $D(a,b).D(a',b') = D(a'',b'')$.

$$\text{On sait que } D(a,b).D(a',b') = \begin{pmatrix} (a+b)^2(a'+b')^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2(a'-b')^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 - b^2)(a'^2 - b'^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2 - b^2)(a'^2 - b'^2) \end{pmatrix}$$

De plus on a $(a-b)(a'-b') = (a.a' + b.b') - (a.b' + b.a')$
 $= A - B$

$$(a+b)(a'+b') = (a.a' + b.b') + (a.b' + b.a')$$

$$= A + B$$

$$(a^2 - b^2)(a'^2 - b'^2) = (a-b)(a+b)(a'-b')(a'+b')$$

$$= (a-b)(a'-b')(a'+b')(a+b)$$

$$= [A-B][A+B] = A^2 - B^2$$

Conclusion : $D(a,b)D(a',b') = D(A,B)$ avec $A = a.a' + b.b'$ et $B = a.b' + b.a'$

(b) En déduire que l'ensemble des matrices de forme $M(a,b)$ est stable par produit.

Pour tout a, b, a', b' , on a

$$M(a,b)M(a',b') = S.D(a,b).S.S.D(a',b').S$$

$$= S.D(a,b).D(a',b').S \quad \text{car } S.S = S^2 = I_4$$

$$= S.D(A,B).S \quad \text{avec } A = a.a' + b.b' \text{ et } B = a.b' + b.a'$$

$$= M(A,B)$$

Conclusion : l'ensemble des matrices de forme $M(a,b)$ est stable par produit.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Les décorations assurent que $A\vec{C}_1 = 1\vec{C}_1$

Donc \vec{C}_1 est une solution de l'équation $A\vec{U} = 1\vec{U}$

On résout l'équation puis on choisit \vec{C}_1 . Par exemple $\vec{C}_1 = (1, -1, 0)$ convient

On fait de même pour \vec{C}_2 et \vec{C}_3 . Par exemple $\vec{C}_2 = (0, 0, 1)$ et $\vec{C}_3 = (1, 1, 0)$ conviennent.

2. (a) On a $AM = M^2M = MM^2 = M.A$

De plus comme $A\vec{C}_1 = \vec{C}_1$, on a $A(M\vec{C}_1) = AM\vec{C}_1 = MAC_1 = M\vec{C}_1$

Donc $M\vec{C}_1 \in \ker(h_A - id)$

Enfin à la question précédente on a justifier que $\ker(h_A - id)$ est une droite vectorielle dirigée par \vec{C}_1

donc $M\vec{C}_1 \in \ker(h_A - id) = \text{vect}(\vec{C}_1) \implies M\vec{C}_1 = a\vec{C}_1$

- (b) On fait le même raisonnement que précédemment avec \vec{C}_2 et \vec{C}_3

- (c) Justifier que $(M')^2 = D$.

> **Méthode avec les morphismes**

Comme $M^2 = A$ et l'endomorphisme $\mathcal{M}at$ est bijectif, on a $h_M \circ h_M = h_A$

Ainsi $(M')^2 = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h_M \circ h_M) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h_A) = D$.

> **Méthode avec le calcul matricielle**

Comme $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(h_A)$ et $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h_A)$,

On sait que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ la matrice de passage.

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff M^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^2P = D \\ &\iff P^{-1}MP \times P^{-1}MP = D \\ &\iff M' \times M' = D \end{aligned}$$

Déterminer M' .

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &\iff a^2 = 1, b^2 = 3, c^2 = 5 \\ &\iff M' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : Il y a 8 matrices M' possibles (et chacune convient)

Comme avec les formules de changements de base, on a $M = PM'P^{-1}$

donc l'équation $X^2 = A$ admet 8 solutions.

Parmi toutes les solutions y-a-t-il une solution remarquable que l'on pourrait appelé \sqrt{A} ?

Clairement la solution avec uniquement des + est particulière,

ainsi on définit

$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{5} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Partie B.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Et montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3$

C'est bien une famille de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille est libre (Avec la def ou la matrice de passage) et de plus cardinal=3=dimension de $\mathbb{R}_2[X]$

donc c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, comme \mathcal{P} est une base on peu écrire $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$.

j'applique en 1,2,3 ainsi $a = P(1)$, $b = P(2)$ et $c = P(3)$.

- (b) Justifier que Q est inversible et, en utilisant la question précédente, déterminer son inverse Q^{-1} .

On sait que

> $A = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}) = \text{Les nouv\^o et h\^o}$.

> Comme \mathcal{P} est une base, on sait que la matrice de passage $A = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P})$ est inversible.

> On calcule A^{-1} avec les décorations, CàD avec $A^{-1} = \mathcal{M}at(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B})$.

On applique la formule précédente avec $P = 1, X, X^2$, ainsi $1 = P_1 + P_2 + P_3$, $X = P_1 + 3P_2 + 5P_3$ et $X^2 = P_1 + 3^2P_2 + 5^2P_3$, ainsi

$$\text{On trouve } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer l'ensemble d'arrivée \mathcal{A} de f et démontrer que f est linéaire

On doit justifier que $f(aP + bQ) = af(P) + bf(Q)$.

La question est plus difficile qu'il y paraît

> Tout d'abord, on sait que

$$P = P_0S + f(P) \text{ et } \deg f(P) < 3.$$

$$Q = P_0T + f(Q) \text{ et } \deg f(Q) < 3.$$

> Ainsi on a $\lambda P + \mu Q = P_0(\lambda S + \mu T) + \lambda f(P) + \mu f(Q)$

> Pour conclure que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, il faut justifier que ci dessus c'est la division euclidienne.

il faut donc justifier que $\deg(\lambda P + \mu Q) < 3$. Comme $\deg f(P) < 3$ et $\deg f(Q) < 3$, c'est vrai donc cela conclut.

- (b) Démontrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = P(1)P_1 + P(2)P_2 + P(3)P_3$

Comme dans la division euclidienne $\deg(\text{Reste}) < \deg(B)$, on a $\deg(f(X^n)) < 3$.

Ainsi $f(X^n) \in \mathbb{R}_2[X]$ et je peux écrire $f(X^n) = aP_1 + bP_2 + cP_3$

$$\text{Conclusion : } X^n = (X-1)(X-3)(X-5).Q(X) + aP_1 + bP_2 + cP_3$$

j'applique en 1,2,3 ainsi $a = 1, b = 3^n$ et $c = 5^n$.

Partie C.

1. Facile

2. On peut le faire avec la définition.

> Linéaire : facile.

> Injectif avec le noyau : Facile.

> Surjectif avec le théorème du rang : Facile

On peut aussi le faire avec la matrice.

en effet, les décorations assurent que $\text{Mat}_{\substack{(X^0, X^1, X^2) \\ \mathcal{B}}} \substack{(I_3, A, A^2) \\ \mathcal{B}'} (\Phi) = I_3$

Comme la matrice de Φ est inversible, alors le morphisme Φ est un isomorphisme.

3. (a) La question A.1.a avec $P = 1, X, X^2$.

(b) On sait que $X^n = P_0Q + f(X^n)$. De plus $f(X^n) \in \mathbb{R}_2[X]$, donc on peut écrire $f(X^n) = aP_1 + bP_2 + cP_3$.

On calcule a, b, c comme à la question A.b.2

De plus $B_0 = P_0(A) = \dots = 0$, Ainsi on a $A^n = f(A^n) = aP_1(A) + bP_2(A) + cP_3(A)$

$$\text{Conclusion : } A^n = f(A^n) = B_1 + 3^n B_2 + 5^n B_3.$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Quelques propriétés CàD quelques questions de cours.

- (a) Il est rappelé que : $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$
Démontrer cette propriété.

Vu en classe

- (b) **Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique \mathcal{B} .**

Si $i \neq j$, on a $E_{i,j} \times E_{i,j} = \underbrace{\delta_{j,i}}_{=0} E_{i,j} = \mathcal{O}$

Conclusion : Lorsque $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente d'ordre 2.

Si $j = i$, on a $E_{i,i} \times E_{i,i} = \underbrace{\delta_{i,i}}_{=1} E_{i,i} = E_{i,i}$

On a facilement par récurrence que $\forall p$, $E_{i,i}^p = E_{i,i} \neq \mathcal{O}$

Conclusion : La matrice $E_{i,i}$ n'est pas nilpotente

- (c) **Soit N une matrice nilpotente et $\lambda \neq 0$. Montrer que la matrice $\lambda I_n + N$ est inversible.**

On suppose que N est nilpotente d'ordre p , ainsi $N^p = \mathcal{O}$

On sait que Si $ab = ba$ alors $a^p - b^p = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{n-1-k} \right)$

On applique cette identité avec $a = \lambda I_n$ et $b = -N$, (car $ab = ba$)

Ainsi

- (d) **On suppose que H est un hyperplan et que $A \in E_n$ est une matrice avec $A \notin H$.**

Démontrer que : $E_n = H \oplus \text{Vect}(A)$.

> On note $F = H + \text{Vect}(A)$

F est un ssev de E_n donc $\dim(F) \leq n^2$

$H \subsetneq F$ car $A \notin H$ donc $\dim(F) > \dim(H)$

Donc $\dim(F) = n^2$ et $F = E_n$

> De plus avec Grassmann, on a $\dim(H \cap \text{Vect}(A)) = 0$

Donc $H \cap \text{Vect}(A) = \{\vec{0}\}$

Conclusion : $E_n = H \oplus \text{Vect}(A)$

2. Soit H un hyperplan de E_n .

On suppose que H ne contient pas de matrice inversible.

- (a) **Montrer que : $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.**

Comme I_n est inversible et H ne contient pas de matrice inversible,

on a $I_n \notin H$ et $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$ d'après Q1d.

En déduire que : Si N est une matrice nilpotente alors $N \in H$

On suppose que N est une matrice nilpotente

Comme $N \in E_n$ et $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$

on sait que $N = \lambda I_n + M$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in H$

Si $\lambda \neq 0$

Alors $M = -\lambda I_n + N$ est inversible (d'après Q1c) et appartient à H OUPS

Conclusion : $\lambda = 0$ et $N = \mathcal{O} + M \in H$

- (b) On considère la matrice $R = \left(\sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} \right) + E_{n,1} = E_{1,2} + E_{2,3} + \dots + E_{n-1,n} + E_{n,1}$

Montrer que la matrice R est inversible et la matrice R appartient à H .

On a $\det(R) = (-1)^{n+1} \neq 0$ donc la matrice R est inversible.

De plus la matrice R est une CL de matrice nilpotente (voir Q1b)

Conclusion : la matrice R est une CL de matrice appartenant à H et H est un ssev

CàD a matrice R est inversible et dans H OUPS

- (c) **Que peut-on conclure.**

Avec un RA, on a montré que l'hypothèse " H ne contient pas de matrice inversible " est fausse

Conclusion : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

3. Soit H un hyperplan de E_n stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que : $\forall (A,B) \in H^2, A.B \in H$

On suppose que : $I_n \notin H$

(a) Justifier que H et $\text{Vect}(I_n)$ sont deux sous-espace vectoriel supplémentaire de E_n

Déjà fait à la question Q2a

On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H .

(b) Prouver que l'on a : $\forall (M,N) \in E_n^2, p(MN) = p(M)p(N)$.

Pour chaque $(M,N) \in E_n^2 = H \oplus \text{Vect}(I_n)$, on écrit $M = \lambda I_n + H_1$ et $N = \mu I_n + H_2$

ainsi on a $p(M).P(N) = (\lambda I_n)(\mu I_n) = \lambda\mu I_n$

De plus $M.N = (\lambda I_n + H_1)(\mu I_n + H_2) = \lambda\mu I_n + \underbrace{\lambda H_2 + \mu H_1 + H_1 H_2}_{\in H}$

Ainsi $p(M.N) = \lambda\mu I_n$

(c) Démontrer que : $\forall M \in E_n, M^2 \in H \implies M \in H$.

On suppose que $M \in E_n$ et $M^2 \in H$

Comme $M^2 \in H$, on a $p(M^2) = \mathcal{O}$

Comme $M \in E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$, on écrit $M = \lambda I_n + H_1$

Ainsi $p(M^2) = \lambda^2 I_n = \mathcal{O}$ donc $\lambda = 0$

Conclusion : $M = 0 I_n + H_1 = H_1 \in H$

(d) Prouver alors que : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_{i,j} \in H$.

Pour $i \neq j$, alors $E_{i,j}^2 = \mathcal{O} \in H$ donc $E_{i,j} \in H$ et $p(E_{i,j}) = \mathcal{O}$

Pour i , alors $E_{i,i} = E_{i,j} E_{j,i}$ donc $p(E_{i,i}) = p(E_{i,j}.E_{j,i})$

$$= p(E_{i,j}).p(E_{j,i})$$

$$= \mathcal{O}.\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

Conclusion : $p(E_{i,i}) = \mathcal{O}$, CàD $E_{i,i} \in H$

(e) Que peut-on conclure ?

Comme $I_n = E_{1,1} + \dots + E_{n,n}$ et $E_{i,i} \in H$ et H est un ssev

Donc $I_n \in H$ OUPS!!!

Avec un RA, on a montré que l'hypothèse " $I_n \notin H$ " est fausse

Conclusion : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit contient I_n .

4. Soit H un hyperplan de E_n stable pour la multiplication des matrices.

On suppose que $n \geq 3$

On admet qu'il existe une matrice $A \neq \mathcal{O}$ tel que

> Pour tout $M \in E_n$: $M \in H \iff \text{tr}(A^T M) = 0$

Et

> pour tout $M \in H$, $\text{tr}(U.M) = 0$ alors $U = \lambda A^T$

(a) Justifier que pour tout $B \in H$, BA^T est colinéaire à A^T .

Pour chaque $B \in H$. On a

$$\forall M \in H, \text{tr}(BA^T M) = \text{tr}(A^T MB)$$

Comme H est stable, on a $BM \in H$

$$\text{Donc } \forall M \in H, \text{tr}(BA^T M) = 0$$

Ainsi il existe λ tel que $BA^T = \lambda A^T$, CàD BA^T est colinéaire à A^T

(b) Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

On fait un RA. On suppose que la matrice A^T est inversible.

Pour tout $B \in H$, on sait que $BA^T = \lambda A^T$ donc $B = \lambda A^T (A^T)^{-1} = \lambda I_n$

Ainsi : $B \in \text{Vect}(I_n)$

Conclusion : $H \subset \text{Vect}(I_n)$ et $\dim(H) \leq 1$ OUPS

(c) Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par $W = \text{Im}(A^T)$, .

Montrer que W est stable pour tous les éléments de H , CàD que pour toute matrice $B \in H$, W est stable pour B .

Pour tout $\vec{X} \in \text{Im}(A^T)$

On va montrer que $B\vec{X} \in \text{Im}(A^T)$.

Comme $\vec{X} \in \text{Im}(A^T)$, il existe \vec{b} tel que $\vec{X} = A^T \vec{b}$

ainsi $B\vec{X} = B.A^T \vec{b} = \lambda A^T \vec{b} = A^T(\lambda \vec{b}) \in \text{Im}(A^T)$

(d) On suppose que

p le rang de la matrice A^T

(e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Im}(A^T)$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n

P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \mathcal{B}_1 .

Montrer que l'application $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$ est un automorphisme de E_n .

Endomorphisme. Facile

Injectif. On vérifie facilement que le noyau est réduit à $\vec{0}$

Conclusion : φ_P est un endomorphisme de E_n injectif et $\dim(E_n)$ est fini

Donc φ_P est un automorphisme de E_n

(e) En déduire que l'on a : $\dim(H) \leq n^2 - p(n-p)$.

On suppose que $B \in H$ alors $\varphi_P(B) = P^{-1}.B.P$, c'est la matrice de B dans la base \mathcal{B}_1

Comme φ_P est un automorphisme, on a $\dim(H) = \dim(\varphi_P(H))$

Comme $\text{Im}(A^T)$ est stable, $\varphi_P(B)$ est une matrice triangulaire par bloc avec un bloc nul de taille $(n-p).p$

Conclusion : $\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leq n^2 - (n-p).p$

(f) En déduire une absurdité. Que peut-on conclure.

Comme la matrice A^T n'est pas inversible, la matrice A n'est pas inversible

Donc le noyau de A n'est pas réduit à $\vec{0}$ et $\dim(\ker A) \geq 1$.

De plus A n'est pas la matrice nulle donc $\dim(\ker A) \leq n-1$

Ainsi $p = \text{rg}(A) \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$ et $(n-p).p \geq (n-1)$

Conclusion : $\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leq n^2 - (n-p).p \leq n^2 - (n-1) < n^2 - 1$ OUPS