

Exercice 1. [Correction]

Ce problème comporte 4 parties presque indépendantes

I – Solutions d’une équation différentielle

On considère l’équation différentielle $(E) : (1 + x^2) y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^\times .

II – Étude d’une fonction.

Pour tout réel λ , on définit la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^\times par : $\forall x > 0, f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$.

1. Justifier que pour tout réel λ , la fonction f_λ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^\times ,

Et montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.

2. Étudier les variations de g_λ .

On montrera en particulier que l’équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^\times .

Cette solution sera notée m_λ .

3. Dresser le tableau de variations de f_λ .

On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.

4. Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

(a) Montrer que pour λ assez grand, on a : $\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

(b) En déduire, à l’aide des questions précédentes, que : $m_\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

III – Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Étude de F .

- (a) Justifier que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_+^\times
- (b) Déterminer le signe de F sur \mathbb{R}_+^\times .
- (c) Sur \mathbb{R}_+^\times , justifier la dérivabilité de F , calculer $F'(x)$ et déterminer les variations de F .

Cohérence : Les variations sont-elles cohérentes avec le signe de F trouvé à la question précédente ?

(d) DL

- i. En écrivant $x = 1 + h$, déterminer le DL de $\frac{\ln t}{1+t^2}$ au voisinage de $x = 1$.
- ii. Déterminer le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2. Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^\times par : $\forall x > 0 \quad \phi(x) = \frac{\arctan x}{x}$.

(a) Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.

(b) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \arctan(x) \cdot \ln(x) - \int_1^x \phi(t) dt$.

(c) En déduire que F est prolongeable par continuité à droite en 0.

(d) Montrer que le prolongement de F n'est pas dérivable à droite en 0.

IV – Calcul de $F(0)$.

1. Justifier que la série $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ converge.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ la somme partielle

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_k(x)$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, une majoration de $\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$

et justifier que $F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

Exercice 2. [Correction] L'objectif est de déterminer les fonctions $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant la relation notée (H)

$$\forall x \in I, f(x) = x - f(x^2) \quad (H)$$

1. Soit f une fonction vérifiant (H).

Montrer $f(0) = 0$.

2. Unicité.

(a) Soit h une fonction continue sur $[0, 1[$ telle que $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = -h(x^2)$.

Montrer que : $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = h(x^{2^{2^n}})$.

En déduire que : $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = h(0)$.

(b) Soit f, g deux fonctions continue vérifiant (H). Montrer $f = g$.

3. La fonction φ

Pour tout/chaque $x \in [0, 1[$, on considère la série $\sum (-1)^k x^{2^k}$

et on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2^k}$ la somme partielle

(a) Pour tout $x \in [0, 1[$, justifier que la série $\sum (-1)^k x^{2^k}$ converge
et on note $\varphi(x)$ sa limite.

(b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}(x) = x - S_n(x^2)$ et en déduire que φ vérifie (H).

4. La fonction φ est-elle continue ?

Dans les questions suivantes, on considère, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_p : x \mapsto \sum_{k=1}^p kx^{k-1}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Exprimer g_p comme la dérivée d'une fonction encore plus simple, et en déduire son expression.

(b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall a \in [0, 1[$, $\forall t \in [0, a]$, $|g_p(t)| \leq M_a$, où $M_a = \frac{1}{(1-a)^2}$.

On pourra remarquer que la suite $(g_p(t))_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante

(c) En déduire que la fonction $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est M_a -lipschitzienne sur $[0, a]$.

(d) Montrer que la fonction φ est continue puis sur $[0, 1[$

Conclusion : La fonction φ est l'unique solution de notre problème.

Exercice 3. [Correction] Soient 2 réels a et b tel que $a < b$.

On considère une fonction f de classe \mathcal{C}^4 de $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Partie I : La fonction spline de f sur $[a; b]$.

1. Soit la fonction ϕ de $\mathbb{R}_3[X]$ à valeurs dans \mathbb{R}^4 définie par

$$\forall Q \in \mathbb{R}_3[X], \phi(Q) = (Q(a), Q(b), Q'(a), Q'(b))$$

On admet que ϕ est un morphisme. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, tel que

$$P(a) = f(a) \quad P(b) = f(b) \quad P'(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad P'(b) = f'(b)$$

Kulture : Le polynôme P est appelée la fonction spline de f sur $[a; b]$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = ((X - a)^2, (X - a)^2(X - b), (X - b)^2, (X - a)(X - b)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Déterminer les coordonnées de P dans la base \mathcal{C} en fonction de $P(a)$, $P(b)$, $P'(a)$ et de $P'(b)$

4. Démontrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b (t - a)^p (t - b)^q dt = (-1)^q \frac{p! q!}{(p + q + 1)!} (b - a)^{p+q+1}$

Indication : Faire des IPP.

5. En déduire que :

$$\int_a^b P(t) dt = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(b - a)^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$

Partie II : Approximation à un pas.

1. Montrer que, pour tout $x \in]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{24} (x - a)^2 (x - b)^2$$

Indication : on pourra introduire la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(t) = f(t) - P(t) - \lambda(t - a)^2(t - b)^2$ avec λ réel à bien choisir.

2. Justifier que $\|f^{(4)}\| = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$ existe, puis montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b P(t) dt \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{(b - a)^5}{30}$$

Partie III : Méthode à n pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (a_0, \dots, a_n) la subdivision régulière du segment $[0, 1]$, CàD pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k = \frac{k}{n}$.

On note $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, (n - 1)\}$, la restriction de g_n à $[a_k, a_{k+1}]$ est la fonction spline de restriction de f à $[a_k, a_{k+1}]$.

On pose enfin $S_n = \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_n(t) dt$.

1. Montrer que $S_n = -\frac{1}{12n^2} (f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \right)$

2. Montrer que $\left| S_n - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{1}{30n^4}$.

3. On applique la méthode avec $f : t \mapsto f(t) = \frac{1}{1+t}$ et $n = 2$.

Déterminer une approximation de $\ln(2)$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

I – Solutions d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + x^2) y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

C'est une EDL1 Les solutions sont la somme d'une solution particulière et des

> Solutions homogènes

$$\text{On normalise : (E) : } (1 + x^2) h' + 2xh = 0 \iff h' + \frac{2x}{(1 + x^2)} h = 0$$

Comme $\ln|1 + x^2|$ est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de $\frac{2x}{(1 + x^2)}$

$$\text{On sait que : } \forall x > 0, h(x) = K e^{-\ln|1+x^2|} = \frac{K}{1+x^2}$$

> Solution Particulière

$$\text{On cherche une solution particulière de (E) de la forme } p(x) = \frac{K(x)}{1+x^2}$$

$$\text{Ainsi } K'(x) = \frac{1}{x} \text{ et je choisis } \forall x > 0, K(x) = \ln|x| = \ln(x) \text{ Ainsi } p(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \text{ convient}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* sont :

$$\forall x > 0, y(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{K}{1+x^2} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

II – Étude d'une fonction.

Pour tout réel λ , on définit la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0, f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$.

- Justifier que pour tout réel λ , la fonction f_λ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* ,

On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $x > 0$.

De plus la fonction f est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Conclusion : la fonction f_λ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^*

Et montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x > 0, f'_\lambda(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - (\ln(x) + \lambda)2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)}{x(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est bien du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.

- Étudier les variations de g_λ .

La fonction g_λ est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

$$\text{et } \forall x > 0, g'_\lambda(x) = 2x - 4x(\ln x + \lambda) - 2x^2 \frac{1}{x} = -4x(\ln x + \lambda)$$

D'où le bô tableau

x	0	$e^{-\lambda}$	m_λ	$+\infty$
$g_\lambda(x)$	1	$\dots > 0$	0	$-\infty$

On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^* . Cette solution sera notée m_λ .

Avec le théorème de la bijection monotone, on obtient que : l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^* .

- Dresser le tableau de variations de f_λ .

Avec le tableau de variation de g_λ on a le signe de g_λ , on déduit le tableau de variations suivant

x	0	m_λ	$+\infty$
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2m_\lambda^2}$	0

On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$,

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = -\infty$, ce n'est pas une FI et

$$f_\lambda(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1 + x^2} \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln x + o(\ln x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\ln x}{x^2} [1 + o(1)] \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.

On sait que : $g_\lambda(m_\lambda) = 0 \iff 1 + (m_\lambda)^2 - 2(m_\lambda)^2(\ln(m_\lambda) + \lambda) = 0$

$$\text{Ainsi } \ln(m_\lambda) + \lambda = \frac{1 + (m_\lambda)^2}{2(m_\lambda)^2}$$

$$\text{Conclusion : } f_\lambda(m_\lambda) = \frac{\ln(m_\lambda) + \lambda}{1 + (m_\lambda)^2} = \frac{\frac{1 + (m_\lambda)^2}{2(m_\lambda)^2}}{1 + (m_\lambda)^2} = \frac{1}{2m_\lambda^2}$$

4. Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

(a) Montrer que pour λ assez grand, on a : $\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

$$> \text{ On a } g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2(-\ln(\lambda) + \lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} 1 + o(1) \sim 1 > 0$$

$$\text{Comme } g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} 1 > 0 \text{ Donc pour } \lambda \text{ assez grand, on a } g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 0$$

et d'après le tableau de variation de g_λ , on a $\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda$

$$> \text{ On a } g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\ln(\lambda) + \lambda\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{2\lambda}$$

$$\underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} -1 + o(1) + o(1) \sim -1$$

$$\text{Comme } g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} -1 < 0 \text{ Donc pour } \lambda \text{ assez grand, on a } g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) < 0$$

et d'après le tableau de variation de g_λ , on a $m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

(b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que : $m_\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

$$\text{On sait que : } g_\lambda(m_\lambda) = 0 \iff 1 + (m_\lambda)^2 - 2(m_\lambda)^2(\ln(m_\lambda) + \lambda) = 0$$

$$\text{On réorganise } (m_\lambda)^2 = \frac{1 + (m_\lambda)^2}{2(\ln(m_\lambda) + \lambda)}$$

L'encadrement précédent assure que : $m_\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ Donc $m_\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} o(1)$

$$\ln(m_\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(\ln \lambda) = o(\lambda)$$

$$\text{Conclusion : } m_\lambda = \sqrt{\frac{1 + (m_\lambda)^2}{2(\ln(m_\lambda) + \lambda)}} = \sqrt{\frac{1 + o(1)}{2\lambda(1 + o(1))}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} [1 + o(1)]$$

III – Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Étude de F .

(a) Justifier que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_+^\times

Le nombre $F(x)$ se calcule Ssi la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $[1, x]$

Ssi $[1, x] \subset \mathbb{R}_+^\times$

Ssi $x \in \mathbb{R}_+^\times$

Conclusion : la fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_+^\times

(b) Déterminer le signe de F sur \mathbb{R}_+^\times .

> Si/Lorsque $x > 1$.

$\forall t \in [1, x], \frac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$ et les bornes $[1, x]$ sont croissantes

Donc $\forall x \geq 1, F(x) \geq 0$

> Si/Lorsque $0 < x < 1$.

$\forall t \in [1, x], \frac{\ln t}{1+t^2} \leq 0$ et les bornes $[1, x]$ sont **dé-croissantes**

Donc $\forall x \in]0, 1[, F(x) \geq 0$

(c) Sur \mathbb{R}_+^\times , justifier la dérivabilité de F , calculer $F'(x)$ et déterminer les variations de F .

Comme la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue, on sait que F est dérivable

Et $\forall x > 0, F'(x) = [\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}(1)]$

$$= \mathcal{H}'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

(d) DL

i. En écrivant $x = 1 + h$, déterminer le DL de $\frac{\ln t}{1+t^2}$ au voisinage de $x = 1$.

ii. Déterminer le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2. Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Pour } x > 0, \text{ on a } F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$

3. Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^\times par : $\forall x > 0 \quad \phi(x) = \frac{\arctan x}{x}$.

(a) Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.

$$\text{On a } \phi(x) = \frac{\arctan x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x)}{x} = 1[1 + o(1)] \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc ϕ est prolongeable par continuité en 0 avec $\phi(0) = 1$

(b) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \arctan(x) \cdot \ln(x) - \int_1^x \phi(t) dt$.

$$\text{Pour } x > 0, \text{ on a } F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

On fait une IPP

(c) En déduire que F est prolongeable par continuité à droite en 0.

On a $\arctan(x) \cdot \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ ce n'est pas une FI

$$\text{et } \int_1^x \phi(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \int_1^0 \phi(t) dt \text{ car } \phi \text{ est continue sur } [0, 1]$$

$$\text{Conclusion : } F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} - \int_1^0 \phi(t) dt = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dt$$

(d) Montrer que le prolongement de F n'est pas dérivable à droite en 0.

Comme $F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ (ce n'est pas une FI)

Conclusion : D'après le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 ,
le prolongement de F n'est pas dérivable à droite en 0.

IV – Calcul de $F(0)$.

- Justifier que la série $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ converge.

Critère des séries alternées ou Absolument convergente

- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_k(x)$

On fait une IPP, ainsi $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$

$$= \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \int_1^x \frac{t^k}{k+1} dt$$

$$= \frac{-1}{(k+1)^2} + \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}$$

Ainsi on a $I_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(k+1)^2}$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

Pour tout/chaque $x > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} \neq 0 = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} \text{ Fini.}$$

Puis on ré-organise.

- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, une majoration de $\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$.

On multiplie par $\ln(x)$ et on intègre sur $[1, x]$

Ainsi $F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{\ln(t) \cdot t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

Ainsi on a, $\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| = \left| \int_1^x \frac{\ln(t) \cdot t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right|$

$$\leq \int_1^x \left| \frac{\ln(t) \cdot t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt$$

ICI $x \in]0, 1[$, donc $\ln(t) \leq 0$

$$\leq \int_1^x \frac{\ominus \ln(t) \cdot t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

$$\leq - \int_1^x \frac{\ln(t) \cdot t^{2n+2}}{1+\mathcal{O}} dt$$

$$\leq -I_{2k+2}(x)$$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$

On regard ce que devient l'inégalité précédente quand $x \rightarrow 0$

et justifier que $F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

Le théorème de la distance assure que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(0)$

Conclusion : $F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Soit f une fonction continue vérifiant (H).

(a) Montrer $f(0) = 0$.

On applique la relation (H) avec $x = 0 \in I$, ainsi $f(0) = 0$

(b) On suppose $I = [0, 1]$. Calculer $f(1)$.

On applique la relation (H) avec $x = 1 \in I$, ainsi $f(1) = 1/2$

2. Unicité

(a) Soit h une fonction continue sur $[0, 1[$ telle que $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = -h(x^2)$.

Montrer que : $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = h(x^{2^{2^n}})$.

On le fait facilement par récurrence

Il est bon de noter/dire que : pour tout $x \in [0, 1[$, on a bien $x^{2^{2^n}} \in [0, 1[$

En déduire que $\forall x \in [0, 1[$, $h(x) = h(0)$.

Pour tout/chaque $x \in [0, 1[$.

On regarde à la limite quand $n \rightarrow \infty$ la relation $h(x) = h(x^{2^{2^n}})$

$$h(x^{2^{2^n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(0) \text{ car } h \text{ est continue et sachant que } x \in [0, 1[, \text{ on a } x^{2^{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Conclusion : à la limite, on a $h(x) = h(0)$.

(b) Soit f, g deux fonctions continue vérifiant (H). Montrer $f = g$.

On va montrer que la fonction $h = f - g$ est nulle sur I .

Il est clair que : h est continue,

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{et } \forall x \in [0, 1[, h(x) = f(x) - g(x) = (x - f(x^2)) - (x - g(x^2)) = -h(x^2)$$

Conclusion : La fonction h est bien nulle sur I .

3. La fonction φ

(a) Pour tout $x \in [0, 1[$, justifier que la série $\sum (-1)^k x^{2^k}$ converge et on note $\varphi(x)$ sa limite.

Pour tout/chaque $x \in [0, 1[$

$$\text{On a } \left| (-1)^k x^{2^k} \right| = \left| x^{2^k} \right| = o(1/n^2)$$

Conclusion : La série est absolument convergente donc convergente.

(b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}(x) = x - S_n(x^2)$

$$\begin{aligned} \text{On a } S_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k x^{2^k} = \underbrace{x}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x^{2^k} \\ &= x + \sum_{p=0}^n (-1)^{p+1} x^{2^{p+1}} \\ &= x - \sum_{p=0}^n (-1)^p (x^2)^{2^p} = x - S_n(x^2) \end{aligned}$$

En déduire que φ vérifie (H).

On regarde ce que devient l'égalité précédent quand $n \rightarrow \infty$

ainsi on a : $\forall x \in [0, 1[$, $\varphi(x) = x - \varphi(x^2)$. Donc φ vérifie (H).

4. La fonction φ est-elle continue ?

Dans les questions suivantes, on considère, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_p : x \mapsto \sum_{k=1}^p kx^{k-1}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer g_p comme la dérivée d'une fonction encore plus simple, et en déduire son expression.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0, 1[, \text{ on a } g_p(x) &= \sum_{k=1}^p kx^{k-1} = \sum_{k=1}^p [x^k]' \\ &= \left[\sum_{k=1}^p x^k \right]' \\ &= \left[\frac{1 - x^{p+1}}{1 - x} - 1 \right]' \\ &= \frac{-(p+1)x^p(1-x) - (1-x^{p+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (p+1)x^p + px^{p+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall a \in [0, 1[, \forall t \in [0, a], |g_p(t)| \leq M_a$, où $M_a = \frac{1}{(1-a)^2}$.

Pour tout $t \in [0, 1[$, on a (croissance comparée),

$$g_p(t) = \frac{1 - (p+1)t^p + pt^{p+1}}{(1-t)^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-t)^2}$$

De plus la suite $(g_p(t))_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante car $g_{p+1}(t) - g_p(t) = (p+1)t^p \geq 0$

$$\text{Donc Pour tout } t \in [0, 1[, \text{ on a } g_p(t) \leq \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\text{ET } \forall a \in [0, 1[, \forall t \in [0, a], \text{ on a } \frac{1}{(1-t)^2} \leq \frac{1}{(1-a)^2}$$

Et enfin Comme tout est positif sur le domaine, on a $|g_p(t)| = g_p(t)$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall a \in [0, 1[, \forall t \in [0, a]$,

$$|g_p(t)| = g_p(t) \leq \frac{1}{(1-t)^2} \leq \frac{1}{(1-a)^2} = M_a$$

(c) En déduire que la fonction $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est M_a -lipschitzienne sur $[0, a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in [0, 1[, \forall t \in [0, a]$, on a

$$\begin{aligned} |S'_n(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k 2^k x^{2^k-1} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left| (-1)^k 2^k x^{2^k-1} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} 2^k x^{2^k-1} \\ &\leq \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ est une puissance de } 2}}^{2^{n+1}} px^{p-1} \\ &\leq \sum_{\substack{p=1 \\ \text{tous}}}^{2^{n+1}} px^{p-1} = g_{2^{n+1}}(t) \leq M_a \end{aligned}$$

Donc d'après le TAF, on a la fonction $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est M_a -lipschitzienne sur $[0, a]$.

(d) Montrer que la fonction φ est continue $[0, a]$.

Comme la fonction $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est M_a -lipschitzienne sur $[0, a]$,

$$\text{On sait que } \forall x, x' \in [0, a], |S_n(x) - S_n(x')| \leq M_a |x - x'|$$

À la limite quand $n \rightarrow \infty$, on a $\forall x, x' \in [0, a], |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M_a |x - x'|$

Conclusion : Sur $[0, a]$, la fonction φ est M_a -lipschitzienne et donc continue.

Montrer que la fonction φ est continue sur $[0, 1[$

À méditer

Conclusion : La fonction φ est l'unique solution de notre problème.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Partie I : La fonction spline de f sur [a; b].

- Méthode 1. On écrit $A = \text{Mat}(\phi)$ et on justifie que $\det(A) \neq 0$
 Méthode 2 $P \in \ker(\phi) \iff P \in \mathbb{R}_3[X]$ et a et b sont 2 racines doubles
 Donc $P = 0$ (degré Vs racine) ainsi ϕ est injective.
 puis avec le théorème du rang, ϕ est surjective.
- Comme ϕ est bijective de $\mathbb{R}_3[X]$ sur \mathbb{R}^4 et $(f(a), f(b), f'(a), f'(b)) \in \mathbb{R}^4$
 Ainsi l'équation $\phi(Q) = (f(a), f(b), f'(a), f'(b))$ admet une unique solution noté P .
- La famille est libre (avec la def "facile") et cardinal=4=dim donc c'est une base
 De plus on a

$$P(X) = \frac{f(b)}{(b-a)^2}(X-a)^2 + \frac{P'(b) - 2(b-a)P(b)}{(a-b)^2}(X-a)^2(X-b) + \frac{P'(a) - 2(a-b)P(a)}{(a-b)^2}(X-a)(X-b)^2 + \frac{f(a)}{(b-a)^2}(X-b)^2$$

- à l'aide d'une IPP, on a $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= -\frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1} \\ &\vdots \\ &= (-1)^q \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I_{p+q,0} \\ &= (-1)^q \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} \frac{(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)} \quad \text{car } I_{p+q,0} = \int_a^b (t-a)^{p+q} dt = \left[\frac{(t-a)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_a^b \\ &= (-1)^q \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1} \end{aligned}$$

- On intègre et on trouve que :

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{f(b)}{(b-a)^2} \frac{(b-a)^3}{3} - \frac{P'(b) - 2(b-a)P(b)}{(a-b)^2} \frac{(b-a)^4}{4} + \frac{P'(a) - 2(a-b)P(a)}{(a-b)^2} \frac{(b-a)^4}{4} + \frac{f(a)}{(b-a)^2} \frac{(b-a)^3}{3}$$

On regroupe ainsi

$$\int_a^b P(t)dt = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$

Partie II : Approximation à un pas.

- On choisit λ tel que $h(x) = 0$
 Avec Rolle, sur $[a, x]$ et sur $[x, b]$, on construit u, v, \dots
 De plus $h'(a) = h'(b) = 0$
 Conclusion : h' s'annule en $a < u < v < b$ et avec Rolle, il existe c tel que $h^{(4)}(c) = 0$

on a facilement $h^{(4)}(c) = 0 \implies f(x) = P(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{24}(x-a)^2(x-b)^2$

- la fonction $\|f^{(4)}\|$ est continue sur le segment $[a, b]$, ainsi $\|f^{(4)}\| = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ existe.

$$\begin{aligned} \text{On a } |f(x) - P(x)| &= \left| \frac{f^{(4)}(c)}{24}(x-a)^2(x-b)^2 \right| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{24} \right| |(x-a)^2(x-b)^2| \\ &\leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} (x-a)^2(x-b)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b P(t)dt \right| &\leq \int_a^b |f(t) - P(t)| dt \leq \int_a^b \frac{\|f^{(4)}\|}{24} (t-a)^2(t-b)^2 dt \\ &\leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} I_{2,2} \\ &\leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{2!2!}{5!} (b-a)^5 = \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{(b-a)^5}{30} \end{aligned}$$

Partie III : Méthode à n pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (a_0, \dots, a_n) la subdivision régulière du segment $[0, 1]$, CàD pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $a_k = \frac{k}{n}$.

On note $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$, la restriction de g_n à $[a_k, a_{k+1}]$ est la fonction spline de restriction de f à $[a_k, a_{k+1}]$.

On pose enfin $S_n = \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_n(t) dt$.

1. On a avec la formule de la question Q15

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(a_{k+1} - a_k) \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} - \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{12} (f'(a_{k+1}) - f'(a_k)) \right] \\ &\quad \text{Or } a_k = \frac{k}{n} \text{ donc } a_{k+1} - a_k = \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \right] - \frac{1}{12n} \sum_{k=0}^{n-1} [f'(a_{k+1}) - f'(a_k)] \\ &\quad \text{Or } a_k = \frac{k}{n} \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} [f'(a_{k+1}) - f'(a_k)] \text{ se télescope} \\ &= -\frac{1}{12n} (f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \right] \end{aligned}$$

2. On va utiliser la majoration de la question Q12 en remarquant que

la norme infini sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ est bien majorée par $\|f^{(4)}\|$, la norme infini sur chaque $[0, 1]$.

On a

$$\begin{aligned} \left| S_n - \int_0^1 f(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_n(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (g_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |g_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{(a_{k+1} - a_k)^5}{30} \\ &\quad \text{Or } a_k = \frac{k}{n} \text{ donc } a_{k+1} - a_k = \frac{1}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{1}{30n^5} \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{1}{30n^5} \text{ (nb de plateau)} = \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{1}{30n^4} \end{aligned}$$

3. On applique la méthode avec $f : t \mapsto f(t) = \frac{1}{1+t}$ et $n = 2$. On a

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{12 \cdot 4} (f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \left[\frac{f(k/2) + f(k+1/2)}{2} \right] \\ &= \frac{-1}{48} \left(\frac{-1}{4} - \frac{-1}{1} \right) + \frac{1}{4} [f(0) + 2f(1/2) + f(1)] \\ &= \frac{-1}{48} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left[1 + 2 \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{-1}{64} + \frac{1}{4} \left[\frac{6+8+3}{6} \right] = \frac{-1}{64} + \frac{17}{24} = \frac{-3+136}{192} = \frac{133}{192} \approx 0,693 \end{aligned}$$

De plus $\forall t \in [0, 1]$, $f^{(4)}(t) = \frac{24}{(1+t)^5}$, ainsi $|f^{(4)}| = 24$

$$\text{Ainsi } \left| S_2 - \int_0^1 f(t) dt \right| = \left| \frac{139}{192} - \ln(2) \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|}{24} \frac{1}{30 \times 2^4} = \frac{1}{30 \times 2^4} = \frac{1}{480} \approx 0,002$$

Conclusion : $0,691 \leq \ln(2) \leq 0,695$

Pour info : $\ln(2) \approx 0.0.69314718056$