Dénombrement.

Le programme officiel

Cardinal d'un ensemble fini.

> Cardinal d'un ensemble fini.

Notations |A|, Card(A).

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

> Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

> Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

> Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

La formule du crible est hors programme.

> Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

> Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

> Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

> Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

1 Un peu de théorie.

1.1 Cardinal d'un ensemble fini.

Définition 1.
On dit qu'un ensemble non vide $\mathbb{E}$ est fini

Ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathbb{E}$.

Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé cardinal de $\mathbb{E}$

Le cardinal est noté $card(\mathbb{E})$, $|\mathbb{E}|$ ou encore $\#(\mathbb{E})$.

Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est "fini" et $card(\varnothing) = 0$.

De plus on a

$$\boxed{\text{On a} \quad card\Big(A \cup \{e\}\Big) = \begin{cases} = card(A) + 1 & Si\ e \notin A \\ = card(A) & Si\ e \in A \end{cases}}$$

`Remarque. Intuitivement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.`

Démonstration : C'est "évident" mais il faut une démonstration.
Soit A un ensemble fini et on note $card(A) = n$ et φ une bijection de A sur $\{1, 2, ..., n\}$

> Lorsque $e \in A$ alors $A \cup \{e\} = A$ fini.
> et φ est une bijection de $A \cup \{e\} = A$ sur $\{1, 2, ..., 1n\}$
>
> Lorsque $e \notin A$, on fabrique une bijection φ' de $A \cup \{e\}$ sur $\Big\{1, 2, ..., n, (n+1)\Big\}$ avec
> Si $x \in \{1, 2, ..., n\}$, $\varphi'(x) = \varphi(x) \in \{1, , 2, ..., n\}$ et Si $x = e$, $\varphi'(e) = n + 1$

Théorème 2. Bon sens

> On suppose que $A \subset B$
> Alors $card\,(A) \leqslant card(B)$.
>
> On suppose que $A \subsetneq B$
> Alors $card\,(A) < card(B)$.

Et enfin on a le célèbre $\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ card\,(A) = card(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B.$

Démonstration : C'est "évident" mais if faut une démonstration.
On suppose que $card(A) = n$ et que $A \subset B$
alors $B = A \cup \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_p\}$.
Comme $card(A) = n$, il existe une bijection h de A sur $\{1, 2, ..., n\}$.
On fabrique une bijection h' de $B = A \cup \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_p\}$ sur $\{1, 2, ..., n, n+1, .., n+p\}$

avec $\forall a \in \mathscr{A}$, $h'(a) = h(a)$ et $\forall\, i \in \{1, 2, .., p\}$ $h'(e_i) = n + i$

Théorème 3. cardinal et bijection
Soit A et B deux ensembles finis.

> $card(A) = card(B)$ Ssi il existe une bijection de A sur B
> Plus précisément
> $card(A) \leqslant card(B)$ Ssi il existe une injection de A à valeurs dans B.
> $card(A) \geqslant card(B)$ Ssi il existe une surjection de A sur B.
>
> On suppose que $card(A) = card(B)$ et $h : A \longrightarrow B$ une fonction.
> On a équivalence
> h est injective $\Longleftrightarrow$ h est surjective $\Longleftrightarrow$ h est bijective

Démonstration :

> On va faire $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$.

Rappel : Une composée de bijection est encore une bijection.

$\boxed{\Longrightarrow ?}$

On suppose que $card(\mathbb{E}) = card(\mathscr{F}) = n < \infty$.

$\boxed{\text{On va montrer qu'il existe une bijection entre } \mathbb{E} \text{ et } \mathscr{F}.}$

Comme $card(\mathbb{E}) = n$, il existe une bijection g de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathbb{E}$.
De même comme $card(\mathscr{F}) = n$, il existe une bijection h de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathscr{F}$.
Ainsi $h \circ g^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{E}$ sur $\mathscr{F}$.

$\boxed{\Longleftarrow ?}$

On suppose que $card(\mathbb{E}) = n < \infty$ et qu'il existe une bijection de h de $\mathbb{E}$ sur $\mathscr{F}$

$\boxed{\text{On va montrer que } card(\mathscr{F}) = n.}$

Comme $card(\mathbb{E}) = n$, il existe une bijection g de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathbb{E}$.
Ainsi $h \circ g$ est une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\mathscr{F}$. Donc $card(\mathscr{F}) = n$

Fini □

> On démontre les équivalences se démontre par récurrence.

1.2 Opérations sur les cardinaux

Théorème 4. Formulaires classiques.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble et A, B des sous-ensembles.

> $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
En particulier *Lorsque* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

> Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\mathbb{E}$

alors $card(\mathbb{E}) = card(A_1) + card(A_2) + ... + card(A_n)$

`Définition` : On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\mathbb{E}$
Ssi $\mathbb{E} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ et les A_1 sont 2 à 2 disjoints

> $card(^cA) = card(\mathbb{E}) - card(A)$

Généralisation : Si $B \subset A$ alors $card(A/B) = card(A) - card(B)$

Démonstration :

> Si $A \cap B = \varnothing$, Alors $A \cup B = A \cup \{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \cdots \cup \{b_p\}$ et on utilise la formule $card(A \cup \{e\}) = card(A) + 1$.
> Puis la formule $card(E) = card(A_1) + card(A_2) + ... + card(A_n)$ se fait ensuite par récurrence.
> Pour la formule générale $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

On va fabriquer une partition de $A \cup B$.

Comme $A \cap B$ est une parie de A je la "complète" avec A'. Ainsi $A \cup B$ et A' forment une partition de A.
Comme $A \cup B$ est une parie de B je la "complète" avec B'.

Il est clair que $A \cap B$, A' et B' forment une partition de $A \cup B$

De plus on

> $card(A \cup B) = card(A \cap B) + card(A') + card(B')$.
> $card(A) = card(A \cap B) + card(A')$
> $card(B) = card(A \cap B) + card(B')$
> $card(A \cap B) = card(A \cap B)$

> Comme A et ^cA forment une partition de E, c'est clair.

Fini □

2 Raisonnements simples.

2.1 Compter les listes ordonnées.

Définition 5. $E \times F$**=Liste = liste ordonnée = liste python**

Soient E, F deux ensembles finis et $p \in \mathbb{N}$.

Une 2-liste d'éléments de E et F est un élément de $E \times F$

CàD une 2-liste de E et F, c'est $(e, f) \in E \times F$

`Dans une liste, l'ordre est important et il peut y avoir des répétitions`

De plus on a : $card\left(E \times F\right) = card(E).card(F)$

Démonstration : On va démontrer que $card(E \times F) = n.p$ avec $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Les éléments de $E \times F$ sont les couples (e, f)

`Démonstration théorique.`

On note h une bijection de E sur $\{1, 2, ..., n\}$, ainsi on numérote les éléments de E et $E = \{e_1, ..., e_n\}$

et g une bijection de F sur $\{1, 2, ..., p\}$, ainsi on numérote les éléments de F et $F = \{f_1, ..., f_p\}$

On considère la fonction φ de $E \times F$ définie par

$$\forall (e, f) \in E \times F,\ \varphi\big((e, f)\big) = \big((e_i, f_j)\big) = i + n.\big(j-1\big)$$

On vérifie (à faire) que φ réalise une bijection de $E \times F$ sur $\{1, 2, ..., np\}$.

On a $(e_1, f_1) \xrightarrow{\varphi} 1 + 0n,\quad (e_2, f_1) \xrightarrow{\varphi} 2 + 0n,\quad .....(e_n, f_1) \xrightarrow{\varphi} n + 0n$

$(e_1, f_2) \xrightarrow{\varphi} 1 + n,\quad (e_2, f_2) \xrightarrow{\varphi} 2 + n,\quad .....(e_n, f_2) \xrightarrow{\varphi} n + 2n$

$\vdots$

$(e_1, f_p) \xrightarrow{\varphi} 1 + n(p-1),\quad .....(e_n, f_p) \xrightarrow{\varphi} n + (p-1)n = np$

`Démonstration pratique.`

Pour fabriquer (e, f), on suit la démarche

> Je choisis e dans E : J'ai n possibilités.

> puis je choisis f dans F : J'ai p possibilités.

Conclusion : $card(E \times F) = (NbdeChoix) \times (NbdeChoix) = n \times p$

Théorème 6. Généralisation

$$card(E_1 \times E_2 \times \cdots E_n) = card(E_1).card(E_2)...card(E_n)$$

$$card\left(E^n\right) = card(E \times E \times \cdots E) = card(E).card(E)...card(E) = [card(E)]^n$$

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}$. Combien y a-t-il de matrices D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, diagonales tel que $M^3 = I$. Puis tel que $M^2 = I$.
2. Dans $\mathbb{C}$. Combien y a-t-il de matrices D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, diagonales tel que $M^3 = I$. Puis tel que $M^2 = I$.

Exercice 2.

1. On sait que $2016 = 2^5\,3^2\,7$.
   Déterminer le nombre de diviseur positif de 2016
2. Même question avec $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$

2.2 Choisir p éléments parmi n.

Définition 7. Combinaison

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p-combinaison (ou p-combinaison sans répétition de $\mathbb{E}$,) un ensemble de p éléments *distincts* de $\mathbb{E}$.

Ainsi une p-combinaison, c'est choisir p éléments parmi les n disponibles.

Une k-combinaison de E est une partie à k éléments de E.

Théorème 8. Choisir p éléments parmi n disponibles

Lorsque je choisis p éléments parmi n disponibles

Alors j'ai $\binom{n}{p}$ possibilités

Démonstration : Voir section "raisonnements par disjonction"

Exercice 3. [Correction] La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons ($\bigstar$) dans trois cases différentes. Par exemple

	A	B	C
1	$\bigstar$		
2	$\bigstar$		
3		$\bigstar$	

Combien y-a-t-il de grilles possibles.

Exercice 4. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$

1. Combien existe-t-il de parties de $\{1,2,\dots,n\}$ qui contiennent qui contiennent un et un seul élément de $\{1,2,\dots,p\}$?
2. Combien existe-t-il de parties de $\{1,2,\dots,n\}$ qui contiennent qui contiennent au moins un élément de $\{1,2,\dots,p\}$?

Exercice 5. [Correction] **Démonstration combinatoire de la formule du binôme.**

Calculer le coefficient de X^k dans $(1+X)^n = (1+X)(1+X)\cdots(1+X)$

2.3 Double comptage.

Exercice 6. [Correction] **L'égalité du capitaine.**
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$.

En suivant les stratégies ci-dessous, compter combien d'équipes différentes de p personnes avec un capitaine peut-on former à partir d'un groupe de n personnes ?

> Stratégie démocratique : L'équipe désigne son capitaine.
> Stratégie du capitaine : Le capitaine choisit son équipe

En déduire l'égalité du capitaine.

2.4 Anagrammes

Théorème 9.

Combien le mot ANANAS" a-t-il d'anagramme ?

Exercice 7. Multinôme.

Quel est le coefficient de $a^2b^3c^5$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$

2.5 Compter les fonctions.

Dans cette section $\mathbb{E}$ désigne un ensemble et $\mathbb{E}_n$ désigne un ensemble de cardinal $n<\infty$.

Comment définir une fonction

Pour définir h une fonction de $\mathbb{E}_n=\{a_1,...,a_n\}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$, il faut

> choisir $h(a_1)$, l'image de a_1
> Puis choisir $h(a_2)$, l'image de a_2
> etc ....

Théorème 10.

Soit E_n un ensemble de cardinal n

> Soit $\mathscr{F}(E_n,E_p)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{E}_n$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ et on a $card\left(\mathscr{F}(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)\right)=p^n$

> Soit $bij(\mathbb{E}_n)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}_n$ sur $\mathbb{E}_n$ et On a : $card\left(bij(\mathbb{E}_n)\right)=n!$

> Soit $inj(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)$ l'ensemble des injections de $\mathbb{E}_n$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ avec $n\leqslant p$.

$$\text{On a :}\quad card\left(inj(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)\right)=p.(p-1)...(p-n+1)=\frac{p!}{(p-n)!}$$

Démonstration :

> On va décrire les éléments h de $\mathscr{F}(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)$
Je note $a_1,...,a_n$ les éléments de $\mathbb{E}_n$ et $b_1,...,b_p$ ceux de $\mathbb{E}_p$.

Un élément h de $\mathscr{F}(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)$ est complètement défini par les valeurs de $h(a_1),...,h(a_n)$

> Je choisis $h(a_1)$, l'image de a_1 : J'ai p possibilités dans $\mathbb{E}_p$.
> Je choisis $h(a_2)$, l'image de a_2 : J'ai p possibilités.
....etc....
> Je choisis $h(a_n)$, l'image de a_n : J'ai p possibilités.

Conclusion : $card\mathscr{F}(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p) \quad =p\times p\times....\times p=p^n$

> On va décrire les éléments h de $inj(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)$
Comme $card(\mathbb{E}_n)\leqslant card(\mathbb{E}_p)$ on sait qu'il existe des injections de $\mathbb{E}_v$ dans $\mathbb{E}_p$.
Je note $a_1,...,a_n$ les éléments de $\mathbb{E}_n$ et $b_1,...,b_n$ ceux de $\mathbb{E}_p$.

Un élément h de $inj(\mathbb{E}_n,\mathbb{E}_p)$ est complètement défini par les valeurs de $h(a_1),...,h(a_n)$

> Je choisis l'image $h(a_1)$ de a_1 : J'ai p possibilités dans $\mathbb{E}_p$.
> Je choisis l'image $h(a_2)$ de a_2 : J'ai $(p-1)$ possibilités *car on doit éviter* $h(a_1)$.
....etc....
> Je choisis l'image $h(a_n)$ de a_n : J'ai $(p-n+1)$ possibilités *car on doit éviter* $h(a_1),...,h(a_{n-1})$.

Conclusion : $card\left(In(\mathbb{E}_n,\_p)\right) \quad =p\times(p-1)\times....\times(p-n+1)=\dfrac{p!}{(p-n)!}$

3 Disjonction, récurrence.

3.1 Disjonction : Compter les fonctions surjectives.

Compter les surjections est difficile et n'est pas au programme.
Il n'y pas de formule générale mais voici deux exemples.

Théorème 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)$ l'ensemble des surjections de $\mathbb{E}_{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$.

$$\text{On a :} \quad card\left[surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)\right] = \binom{n+1}{2}.n.(n-1)!$$

Démonstration : On va décrire les surjections h de $\mathbb{E}_{n+1}$ sur $\mathbb{E}_n$.
Comme $card(\mathscr{D}_{épart}) = card(\mathbb{E}_{n+1}) = n+1$ et $card(\mathscr{A}_{rrivée}) = card(\mathbb{E}_n) = n$,
il y a deux éléments qui ont la même image et pour les autres c'est du "one to one".

> Je choisis 2 éléments au départ : J'ai $\binom{n+1}{2}$ possibilités.n possibilités.
Et je choisis leur image commune : J'ai n possibilités.

> Il reste $(n-1)$ éléments au $\mathscr{D}_{épart}$ à envoyer bijectivement sur $(n-1)$ éléments au $\mathscr{A}_{rrivée}$:
J'ai $(n-1)!$ possibilités.

Conclusion : $card\left(Surj(\mathbb{E}_{n+1}, \mathbb{E}_n)\right) = \binom{n+1}{2}.n.(n-1)!$

3.2 Disjonction : Compter les ensembles.

Théorème 12.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble à n élément.

> Soit $k \in \{1, 2, .., n\}$. On note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties E ayant exactement k éléments.

On a alors $card\left(\mathscr{P}_k(\mathbb{E})\right) = \binom{n}{k}$.

> On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties E ayant exactement $0, 1, ..$ ou n éléments.

On a $card(\mathscr{P}(\mathbb{E})) = 2^n$

Démonstration :
> Choisir un élément de $\mathscr{P}_k(\mathbb{E})$, c'est choisir k éléments de E parmi les n disponibles.
Il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilité.

> Il est clair que les $\mathscr{P}_p(\mathbb{E})$ forment une partition Ainsi

$$\begin{aligned} card(\mathscr{P}(\mathbb{E})) &= card(\mathscr{P}_0(\mathbb{E})) + card(\mathscr{P}_1(\mathbb{E})) + ... + card(\mathscr{P}_n(\mathbb{E})) \\ &= \tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + ... + \tbinom{n}{n} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} 1^k \\ &= (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Fini □

Exercice 8. [Correction] **D'après de la banque CCP.** On considère un ensemble E avec n éléments

1. On note A le nombre de partie X de E. On a donc $X \subset E$.
   (a) Calculer le nombre A_k de partie X de E ayant exactement k éléments
   (b) En déduire que $A = 2^n$
2. On note B le nombre de couples (X, Y) avec X,Y sont des parties de E et $X \subset Y$.
   (a) Calculer le nombre B_k de couples (X, Y) et $card(Y) = k$
   (b) En déduire que $B = 3^n$

3.3 Récurrence Démonstration de p éléments parmi n

Théorème 13. Choisir p éléments parmi n disponibles

Lorsque je choisis p éléments parmi n disponibles

$$\text{Alors j'ai } \binom{n}{p} \text{ possibilités}$$

Démonstration.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble à n éléments et $p \in \{1, 2, ..., n\}$

Je note $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ le nombre de possibilités quand on choisit p éléments parmi les n disponibles, ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ est le nombre de p-combinaisons.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{p}}$$

> On va décrire les p-combinaisons de $\mathbb{E}$.

On sait que les p-combinaison, un ensemble **non ordonné** de p éléments **distincts** de $\mathbb{E}$.

Je pointe un élément a particulier de $\mathbb{E}$ et je note C une p-combinaison.

Il y a 2 situations **disjointes**

Situation 1. $a \in C$

Alors la p-combinaison C est alors constituée de l'élément a et de $(p-1)$ autres à choisir parmi les $(n-1)$ restants

Il y a $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle$ p-combinaison contenant a.

Situation 1. $a \notin C$

Alors la p-combinaison C est alors constituée de p élément à choisir parmi $(n-1)$ (on ne prend pas a).

Il y a $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\rangle$ p-combinaison ne contenant pas a.

Conclusion : Les nombres $\left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle$ vérifient la formule du pochoir,

$$\text{CàD } \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n \\ p-1 \end{matrix} \right\rangle$$

> Pour conclure, on fait par récurrence $H < n >$: $\Big|\ \forall\, p \in \{0, 1, ..., n\},\ \left\langle \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{p}$

Remarque la démonstration n'est pas tout à fait juste. Pour l'hérédité fonctionne, il faut $p \in \{2, 3, ..., n\}$ car la formule du pochoir que l'on a établi, est valide pour $p \geqslant 2$.

> Pour $p = 0$. le nombre $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$, n'est pas défini. Il faut convenir que $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1$. Ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1 = \binom{n}{0}$

> Pour $p = 1$. il faut justifier que $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = n$. C'est facile avec la définition de $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$. Ainsi $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = n = \binom{n}{1}$.

Exercice 9. difficile **Les dérangements.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que : f est un dérangement de $\{1, 2, .., n\}$ Ssi $\begin{cases} f \text{ est une bijection de } \{1, .., n\} \text{ sur } \{1, .., n\} \\ et \\ \forall\, k \in \{1, 2, .., n\},\ f(k) \neq k \end{cases}$

On note D_n l'ensemble des dérangement le nombre de dérangement de $\{1, 2, .., n\}$ et $d_n = card(D_n)$

1. Soit $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ et E_k l'ensemble des bijections de $\{1, .., n\}$ ayant exactement $n-k$ point fixe.

   Montrer que : $card(E_k) = \binom{n}{n-k} d_k$

2. En déduire par double comptage de l'ensemble des bijections que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

4 Plus difficile.

4.1 Compter les fonctions strictement croissantes

Théorème 14. Fonction strictement croissante

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.
Je note $\mathbb{E}_n = [\![1, n]\!] = \{1, 2, ..., n\}$ et $\mathbb{E}_p = [\![1, p]\!]$
Soit $\mathscr{F}_{p,n}$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{E}_p, \mathbb{E}_n)$ des fonctions de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}: & \mathscr{F}_{p,n} & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{E}_n) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Im}(f) = \textit{l'image de } f \end{array}$$

La fonction Im réalise une bijection entre
- Les fonctions **strictement croissantes** de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_n$
et
- $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$ l'ensemble des parties de cardinal p de $\mathbb{E}_n$.

Conclusion : il y a $\binom{n}{p}$ fonctions strictement croissantes de $\{1, 2, ..., p\}$ à valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$

Démonstration :

> Lorsque f est une fonction strictement croissante alors f est injective ainsi :
l'image par Im des fonctions strictement croissantes est bien dans $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$

> Quand on prend une partie $\{i_1, i_2, ..., i_p\}$ dans $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$:
il y a une unique façon de la présenter de façon strictement croissante, CàD avec $i_1 < i_2 < ... < i_p$.

> Pour une suite strictement croissante $i_1 < i_2 < ... < i_p$,
il existe une unique fonction strictement croissante f tel que $f(1) = i_1, ..., f(p) = i_p$.

On a explicité une correspondance one to one entre
- Les éléments de $\mathscr{P}_p(\mathbb{E}_n)$, l'ensemble des parties de cardinal p de $\mathbb{E}_n$.
- Les suites strictement croissantes $1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_p \leqslant n$.
- Les fonctions strictement croissantes de $\{1, 2, ..., p\}$ à valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$.

Conclusion : Les cardinaux sont égaux.

Fini □

4.2 Méthode de l'éventail ou Compter Les fonctions "seulement" croissantes.

> On reprend les explications précédentes, ainsi identifiant $f(i)$ avec i_p, il y a une bijection entre

- Les fonctions croissantes de $\{1,2,\ldots,p\}$ à valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}$.
- Les suites croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$.

On reste à déterminer le nombre de suite avec suites croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$.

On le fait avec une autre bijection : Le principe de l'éventail.

L'idée est de "déplier" le suite croissante $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$ et de lui associer une suite strictement croissante

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n \quad \xrightarrow{\textit{Dépliement}} \quad 1 \leqslant \underbrace{i_1}_{j_1} < \underbrace{i_2+1}_{j_2} < \underbrace{i_3+2}_{j_3} < \ldots < \underbrace{i_p+(p-1)}_{j_p} \leqslant n+p-1$$

$$1 \leqslant \underbrace{j_1}_{i_1} \leqslant \underbrace{j_2-1}_{i_2} \leqslant \underbrace{j_3-2}_{i_3} \leqslant \ldots \leqslant \underbrace{j_p-(p-1)}_{i_p} \leqslant n \quad \xleftarrow{\textit{Repliement}} \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant n+p-1$$

La transformation de dépliement réalise une bijection (car Dépliement∘Repliement=id et Repliement∘Dépliement=id)

> de l'ensemble des suites seulement croissantes $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$
> sur l'ensemble des suites strictement croissantes $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant n+p-1$

Conclusion : il y a $\binom{n+p-1}{p}$ fonctions seulement croissantes
de $\{1,2,\ldots,p\}$ à valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}$

5 Exercices.

—— Compter dans la vie quotidienne ——

Exercice 10. [Correction] **Couple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$?
2. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$ et $x \neq y$ peut-on former ?
3. Combien de couple (x, y) avec $x, y \in [\![1, n]\!]^2$ et $x \leqslant y$ peut-on former ?
4. Combien de domino ? Bonus difficile : Combien de triomino ?

Exercice 11. [Correction] **Numéro de téléphones.** On convient qu'un numéro pourra commencer par 0.

1. Combien y a-t-il de numéro à n chiffres ?
   Quel est la probabilité $p_n = \dfrac{Fav}{Tot}$ qu'un numéro à n chiffres ne contiennent pas le chiffre 9. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$
2. Combien y a-t-il de numéro à 5 chiffres ayant uniquement des chiffres impairs ?
   Quel est la probabilité $p_n = \dfrac{Fav}{Tot}$ qu'il n'y ait que des chiffres impairs distincts ?
3. On note a_n le nombre de numéro avec n chiffre dont la somme est pair.
   Calculer a_n en fonction de de a_{n-1} puis calculer a_n.
4. On suppose que $n \leqslant 10$. Combien y a-t-il de numéro dont les chiffres forment une liste strictement croissante ?

Exercice 12. [Correction] **Anagramme.**

1. Combien le mot ANANAS a-il d'anagramme ?
2. Je choisis 3 lettres parmi les lettres du mot ANANAS.
   Quel est la probabilité de pouvoir écrire le mot ANA ? et celle de SAN ?
3. Combien y a t-il d'anagrammes du mot PREPA tels que toutes les consonnes sont au début ?

Exercice 13. [Correction] **Loto.** Il y a 49 boules numérotés de 1 à 49. On tire 6 boules *simultanément.*

Rappel : Le loto est un impôt sur ceux qui ne comprennent pas les probabilité (et les statistiques)

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Quelle est la probabilité de tirer la boule 41 ? Quelle est la probabilité de tirer les boules 41 et 42 ?
3. Quelle est la probabilité que le tirage ne contienne que des boules avec un numéro pair ?
4. Très Difficile Quelle est la probabilité que le résultat ne contenant pas deux numéros consécutifs ?

Exercice 14. [Correction] **Dictionnaire.** On rappelle que notre alphabet contient 26 lettres dont 6 voyelles et 20 consonnes.

1. Combien de mot de 4 lettres, avec et sans répétition, peut-on former ?
2. Combien de mot de 4 lettres qui alternent une voyelle et une consonne peut-on former ?
3. Dans le dictionnaire, combien de mot de 4 lettres se trouve avant le mot HEDI.
4. Combien de mot de 7 lettres contenant le sous-mot MPSI peut-on écrire ?

Divers

Exercice 15. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$. On trace dans un plan n droites en position générale (CàD deux d'entre elles ne sont jamais ni parallèles ni trois d'entre elles concourantes).

1. Combien y a-t-il de points d'intersection ?
2. Combien y a-t-il de points de triangle ?

Exercice 16. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, p_2, \dots, p_n$ des personnes.

1. De combien de façon peut-on asseoir n personnes sur un banc (par nature rectiligne) ?
2. Même question autour d'une table ronde ?

Exercice 17. [Correction] On considère un quadrillage régulier avec n lignes horizontales et n lignes verticales

1. Combien y a-t-il de rectangle ?
2. Plus difficile Combien y a-t-il de carré ?

Exercice 18. [Correction] Vraiment difficile L'intrépide chenille se présente devant un grillage à maille carrée.

Elle part de la "position" $(0,0)$ et doit atteindre la "position" $(5,8)$.
Elle se déplace uniquement vers la droite ou vers le haut.

Combien a-t-elle de chemins possibles ?

Exercice 19. Très difficile Une classe de MPSI contient 33 élèves

Combien y-a-t-il de façon différente de repartir la classe en 11 groupes de colle ?

Le jeu c'est la vie et c'est pas forcément simple

Exercice 20. [Correction] **Le Yam's ou Yatzé**. On lance 3 dés de couleurs différentes. Ici : $probabilit\acute{e} = {}^{Favorable}/_{Total}$

1. Combien y a-t-il de lancers différents ?
2. Quel est la probabilité d'avoir 3 faces différentes ?
3. Quel est la probabilité d'avoir au moins un six ?
4. Quel est la probabilité d'avoir exactement un six ?
5. Quel est la probabilité d'avoir au moins 2 faces identiques ? d'avoir exactement 2 faces identiques ?

Exercice 21. [Correction] **Poker avec correction détaillée.**
On joue au poker avec un jeu de 52 carte (4 couleurs $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ et 13 hauteurs $2, 3, \dots, D, R, As$).
On distribue 5 cartes.

Combien y a-t-il de mains différentes ?
Quelle est la probabilité d'avoir un full ? avoir une paire ? de ne rien avoir ?

Exercice 22. [Correction] **Poker avec solution non détaillée.**
On distribue 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de main possible ?
2. Quel est la probabilité d'avoir un carré ?
3. Quel est la probabilité d'avoir un full ?
4. Quel est la probabilité d'avoir une couleur ?
5. Quel est la probabilité d'avoir une quinte ou suite ?
6. Quel est la probabilité d'avoir une quinte flush ?
7. Quel est la probabilité d'avoir une simple paire ?
8. Quel est la probabilité d'avoir une double paire ?
9. Quel est la probabilité de n'avoir RIEN ?

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Je choisis 3 cases parmi les 9 disponibles

Ainsi il y a $\binom{9}{3}$ possibilités.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On développe $(1+X)^n = \underbrace{(1+X)}_{Facteur\ 1}\underbrace{(1+X)}_{Facteur\ 2}\ \ldots.\ \underbrace{(1+X)}_{Facteur\ n}$

Pour fabriquer X^k,

je choisis k facteurs il y a $\binom{n}{k}$ possibilités

et dans chacun de ces k facteurs je choisis le monôme X il y a 1 possibilités
et dans chacun des $(n-k)$ autres facteurs je choisis le nombre 1 il y a 1 possibilités

Conclusion : Il y a $\binom{n}{k}$ choix qui aboutissent à X^k,

c'est le coefficient de X^k dans le développement.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On va compter de 2 façons différentes

`Combien d'équipes différentes de` p `personnes avec un capitaine peut-on former à partir d'un groupe de` n `personnes.`

Stratégie démocratique.

> Je choisis p personnes pour faire l'équipe

J'ai $\binom{n}{p}$ possibilités.

> Puis on désigne, dans l'équipe, un capitaine

J'ai p possibilités.

Conclusion : Il y a : $p\binom{n}{p}$ équipes

Stratégie du capitaine.

> Je choisis 1 capitaine

J'ai n possibilités.

> Puis on complète l'équipe

J'ai $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Conclusion : Il y a : $n\binom{n-1}{p-1}$ équipes

Conclusion : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Remarque : On peut aussi démontrer l'égalité en détaillant les factoriels.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) **Ensemble.** On considère un ensemble E avec n éléments

1. On note A le nombre de partie X de E. On a donc $X \subset E$.
   (a) $card(A_k) = \binom{n}{k}$
   (b) $card(A) = card(A_0) + card(A_1) + \ldots + card(A_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k = (1+1)^n = 2^n$
2. On note B le nombre de couples (X,Y) avec X,Y sont des parties de E et $X \subset Y$.
   (a) $card(B_k) = \binom{n}{k}2^k$
   (b) $card(B) = card(B_0) + card(B_1) + \ldots + card(B_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) Un couple étant une liste ordonnée.

> Je choisis x

J'ai n possibilités.

> Puis je choisis y

J'ai $n-1$ possibilités.

Conclusion : Il y a donc $n(n-1)$ couples possibles.

Solution de l'exercice 11 **(Énoncé)**

Nombres. On convient qu'un nombre pourra commencer par 0.

1. 10^n. On a $p_n = \dfrac{9^n}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. $5\times5\times5\times5\times5$ et $5\times4\times3\times2\times1$
3. $\dfrac{10^n}{2}$.

Solution de l'exercice 12 **(Énoncé)** Le mot ANANAS a (3 A), (2 N) et (1 S).

Pour faire un anagramme, je dois placer ces 6 lettres dans 6 positions disctinctes

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6

> Je choisis les places des 3 A, CàD 3 places parmi les 6 disponibles

J'ai $\binom{6}{3}$ possibilités

> Je choisis les places des 2 N, CàD 2 places parmi les 3 restantes

J'ai $\binom{3}{2}$ possibilités.

> Je choisis la place du S, CàD 1 place parmi la seul restante

J'ai $\binom{1}{1}$ possibilité.

Conclusion : ANANAS a $\binom{6}{3}.\binom{3}{2}.\binom{1}{1} = 60$ anagrammes.

Compléments :

- Si on commence par placer les N puis le S et enfin les A,

on obtient le décompte $\binom{6}{2}.\binom{4}{1}.\binom{3}{3}$ qui est bien égale à 60.

Ouf on a trouvé le même résultat.

Donc le décompte final ne dépend pas de l'ordre choisi pour fabriquer l'anagramme.

- Si on détaille les factoriels et on simplifie, on trouve $\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$.

Chacun imaginera et démontrera la formule générale du nombre d'anagramme.

Solution de l'exercice 13 **(Énoncé)**

1. Un tirage, c'est choisir 6 boules parmi 49, il y a donc $\binom{49}{6}$ tirages différents.
2. Un tirage contient la boule 41 Ssi il y a 41 (1 possibilité) et 5 autres boules ($\binom{48}{5}$ possibilités)

   Conclusion : il y a $1\times\binom{48}{5}$ tirages contient la boule 41.

   De même il y a $1\times1\times\binom{47}{4}$ tirage contient les boules 41 et 42.
3. Un tirage ne contient que des boules avec un numéro pair Ssi on choisit 6 parmi les 24 qui ont un numéro pair

   Conclusion : il y a $\binom{24}{6}$ tirages
4. Très Difficile Il faut utiliser le principe de l'éventail dans le sens du repliement

   Conclusion : il y a $\binom{44}{6}$ tirages ne contenant pas deux numéros consécutifs.

Solution de l'exercice 14 **(Énoncé)**

1. Je choisis la première lettre, j'ai 26 possibilités.
   Puis Je choisis la deuxième puis la troisièmes et enfin la quatrièmement lettre

   Conclusion : j'ai $26.26.26.26 = 26^4$ possibilités.

2. IL y a 2 situations selon que l'on commence par Voyelle ou une Consonne.

   > Situation VCVC, il y a $6.20.6.20$ possibilités.
   > Situation CVCV, il y a $20.6.20.6$ possibilités.

   Conclusion : j'ai $2 \times (6.20.6.20)$ possibilités.

3. On compte selon que le mot commence par A,B,... ou G, par H, par HE, par HED

   > Mots de 4 lettres qui commence par A,B,... ou G et donc avant le mot HEDI : Il y a $7.26.26.26$ possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par H mais pas HE et avant le mot HEDI : Il y a $4.26.26$ possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par HE mais pas HED et avant le mot HEDI : Il y a 3.26 possibilités.
   > Mots de 4 lettres qui commence par HED et avant le mot HEDI : Il y a 8 possibilités.

   Conclusion : j'ai $7.26.26.26 + 4.26.26 + 3.26 + 8$ possibilités.

4. Comme le mot MPSI a 4 lettres, il faut impérativement placer la lettre M de MPSI en position 1,2,3 ou 4.
   > Je choisis la place du M et j'écris MPSI
   J'ai 4 possibilités.

   > Puis on complète les trois positions restantes sans restriction.
   Pour chaque positions j'ai 26 possibilités

   Conclusion : il y a $4.26^3 = 70\,304$ mots de 7 lettres contenant le mots MPSI.

   `Compléments` : L'exercice est plus délicat qu'il y parait. Si je change MPSI ou le nombre de lettre il y a des problèmes.

   - **Si on compte les mots de $\boxed{8}$ lettres contenant MPSI**, avec le même raisonnement, on compte 2 fois le mots MPSIMPSI une fois quand M est placé en première position avec $\underbrace{MPSI}MPSI$ et une fois que quand M est placé en 5-ième position avec $MPSI\underbrace{MPSI}$

   - **Si on compte les mots de 7 lettres contenant $\boxed{\textbf{MPMP}}$**, avec le même raisonnement, on compte 2 fois le mots MPMPMPA une fois quand M est placé en première position avec $\underbrace{MPMP}MPA$ et une fois que quand M est placé en 3-ième position avec $MP\underbrace{MPMP}A$

   - Pour plus de renseignement voir : Le paradoxe de Penney.

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. Pour fabriquer un point, il faut 2 droites distinctes

   je choisis 2 droites parmi les n disponibles, ainsi il y a $\binom{n}{2}$ possibilités.

2. Pour fabriquer un triangle, il faut 2 droites distinctes

   je choisis 3 droites parmi les n disponibles, ainsi il y a $\binom{n}{3}$ possibilités.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. **Sur un banc.**

   Il y a n personnes distincte $p_1, ..., p_n$ et sur le banc, il y a n positions bien distinctes.
   Je vais placer successivement les personnes sur le banc.

   > Je place la première personne p_1
   J'ai n possibilités.

   > Je place la deuxième personne p_2 à une autre position que p_1
   J'ai $n-1$ possibilités.

   ...etc...

   Conclusion : Sur un banc, il y a $n!$ configurations possibles.

2. **Autour d'une table ronde.**

Il y a toujours n personnes distincte $p_1,...,p_n$ et n positions.

Mais autour d'une table, les position ne sont pas clairement les identifier.

Pour numéroté les places, je dois choisir arbitrairement une place et ensuite numéroter les positions à partir de cette référence en tournant dans le sens trigonométrique.

> Je place n'importe où la première personne p_1 qui alors me sert de référence pour numéroté les positions de la table dans le sens trigo.

> Je place la deuxième personne p_2 à une autre position
J'ai $n-1$ possibilités.

> Je place la troisième personne p_3 à une position distincte de p_1 et p_2
J'ai $n-2$ possibilités. ...etc...

Conclusion : Autour d'une table, il y a $(n-1)!$ configurations possibles.

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

1. Pour faire un rectangle, il faut deux droites verticales et deux droites horizontales

Conclusion : Il y a $\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}$ rectangle.

2. Plus difficile On compte le nombre de carrée de taille 1 il y en $(n-1)^2$, puis de taille 2, puis ...., puis de taille $(n-1)$ il y en 1^2

À la fin on trouve $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2=\sum_{p=1}^{n-1}p^2=\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

Un "voyage" est une succession de 5 déplacements vers la droite et de 8 déplacement vers le haut,

c'est donc un anagramme sur le "mot" : dddddhhhhhhhh et il y a $\dfrac{13!}{5!8!}$ "voyages" différents

Solution de l'exercice 20 (Énoncé) **Jeu de Dés**.

1. 6^3
2. $\left(6^3-5^3\right)/6^3$ (complémentaire)
3. Pour le favorable : je choisis le dés qui va donner 6 puis la valeur des 2 autres donc $\binom{3}{1}\times1\times5\times5$
4. Pour le favorable : On utilise le complémentaire $6^3-6\times5\times4$.

Solution de l'exercice 21 (Énoncé) **Combien de mains différente ?**

On distribue 5 cartes mais à la fin on ne se préoccupe pas de l'ordre d'arrivée des cartes

Je choisis 5 cartes parmi les 52 disponibles dans le paquet.

Conclusion : Il y a $\binom{52}{5}=2,598,960$ mains différentes.

Probabilité d'avoir un full ?

> Je choisis mes trois cartes de même hauteur.

- Je commence par choisir la hauteur : $\binom{13}{1}$ possibilités
- Puis je choisis 3 cartes de cette hauteur : $\binom{4}{3}$ possibilités

> Je choisis ma paire en plus.

- Je commence par choisir la hauteur : $\binom{12}{1}$ possibilités (on évite la hauteur précédente)
- Puis je choisis 2 cartes de cette hauteur : $\binom{4}{2}$ possibilités

Conclusion : Il y a $\binom{13}{1}.\binom{4}{3}\binom{12}{1}.\binom{4}{2}=3744$ full différents.

La probabilité d'avoir un full est donc $\dfrac{18816}{2598960} \approx 0.0014$

Probabilité d'avoir exactement une paire ?

$>$ Je choisis ma paire.

- Je commence par choisir sa hauteur puis 2 cartes : $\binom{13}{1}\binom{8}{2}$ possibilités

$>$ Je choisis les cartes restantes *(difficiles il ne faut créer par mégarde une autre paire ! ! !)*

- Je commence par choisir leur hauteur puis leur valeur : $\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ possibilités.

Conclusion : Il y a $\binom{13}{1}\binom{8}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1,098,240$ mains avec exactement une paire.

La probabilité d'avoir une paire est donc $\dfrac{1098240}{2598960} \approx 0.42$

Probabilité de ne rien avoir ?

$>$ Je choisis 5 hauteurs différentes et une carte dans chacune des hauteurs. *(Attention, l'approche naïve $52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36$ est fausse.)*

J'ai $\binom{13}{5}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1,317,888$ possibilités.

$>$ MAIS dans ce total, il faut retirer

- Les $\binom{4}{1}\binom{8}{5} = 5148$ couleurs
- Les $\binom{9}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 9216$ suites

Mais on a retiré 2 fois les $\binom{9}{1}\binom{4}{1} = 36$ suites couleurs, il faut donc les rajouter

Conclusion : Il y a $1317888 - 5148 - 9216 + 36 = 1303560$ mains de merde.

La probabilité d'avoir une main de merde est donc $\dfrac{1303560}{2598960} \approx 0.50$

Solution de l'exercice 22 (Énoncé) Jeu de poker.

1. $\binom{52}{5}$
2. Combien de carré : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$
3. Combien de full : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{2}$
4. Combien de couleur : $\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}$
5. Combien de quinte ou suite : $9 \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur de la plus haute carte de quinte : il y a 9 possibilités

   → On choisit une carte dans chaque hauteur pour faire la quinte.
6. Combien de quinte flush : $9 \times \binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur de la plus haute carte de quinte flush : il y a 9 possibilités

   → On choisit la couleur $\binom{4}{1}$
7. Combien de simple paire : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

   Explication

→ On choisit la hauteur de la paire et 2 cartes pour faire la paire. $\binom{13}{1} \times \binom{4}{2}$

→ On choisit 3 hauteurs différentes pour les cartes 3 restantes et une carte par hauteur $\binom{12}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

8. Combien de double paire : $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1}$

   Explication

   → On choisit les hauteurs des 2 paires et 2 cartes dans chaque hauteur pour faire les paire. $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$

   → On choisit une carte pour compléter la main $\binom{44}{1}$

9. Combien de brelan : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

   Explication

   → On choisit la hauteur du brelan et 3 cartes pour faire le brelan $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3}$

   → On choisit 2 hauteurs différentes pour les 2 cartes restantes et une carte par hauteur $\binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

10. Quel est la probabilité de n'avoir RIEN ?

    Voir cours ou bien faire le complémentaire. **Attention** la quinte flush est comptée plusieurs fois (dans les quintes et les couleurs).