

Probabilité.

		2.2 Probabilité uniforme	4
		2.3 Probabilité conditionnelle	5
1 Expérience - Univers - Évènements	1	2.4 Indépendance	6
2 Probabilité.	3	3 Les théorèmes classiques.	7
2.1 Définition.	3	4 Exercices.	8

1 Expérience - Univers - Évènements

Définition 1. Expérience - Univers - Évènements

- > Une expérience aléatoire est une expérience matérielle ou de pensée dont le résultat n'est pas constant;
CàD que lorsqu'on répète l'expérience, on peut obtenir différents résultats.
- > L'ensemble des résultats possibles (ou imaginable) d'une expérience est appelé l'univers ou l'univers des possibles. On le note souvent Ω .
Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés les évènements élémentaires de l'univers Ω .
- > Les partie $A \subset \Omega$ sont appelés les évènements de l'univers Ω .
Remarque : l'ensemble des évènements de l'univers Ω c'est l'ensemble des parties de Ω CàD c'est $\mathcal{P}(\Omega)$

Théorème 2.
On se donne une expérience.
Alors l'univers des possibles Ω n'est pas unique.

L'univers des possibles
dépend de la modélisation de l'expérience.

Voici une expérience avec 2 modélisations.

L'expérience : Je lance 2 dés et je regarde les faces des dés.

Modélisation "discernable".

Je décide de colorier les dés : un Rouge et un Bleu et de lire le résultat en commençant par le dé rouge.
Ainsi l'univers des possibles Ω_1 , c'est l'ensemble des couples

$$\left(\begin{array}{cc} \text{Résultat du} & \text{Résultat du} \\ \text{dé Rouge} & \text{dé Bleu} \end{array} \right)$$

Avec cette modélisation, on a

> $\Omega_1 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (6, 6) \}$
> et on a facilement *cardinal* $(\Omega_1) = 6 \times 6 = 36$

Modélisation "daltonien".

Je décide que les dés sont indiscernables et je lis le résultat par ordre croissant.
Ainsi l'univers des possibles Ω_2 , c'est l'ensemble des couples

$$\left(\begin{array}{cc} \text{le plus petit} & \text{le plus grand} \\ \text{des 2 dés} & \text{des 2 dés} \end{array} \right)$$

Avec cette modélisation, on a

> $\Omega_2 = \{ (1, 1), (1, 2), \cancel{(2, 1)}, \dots, (6, 6) \}$
> et on a *cardinal* $(\Omega_2) = \text{distinct} + \text{Double} = \binom{6}{2} + 6 = 21$

Définition 3. Vocabulaire classique sur les évènements

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.
 On considère A, B des évènements, donc A, B sont des parties de Ω .

- > L'évènement $A \cup B$ signifie que «l'un au moins des deux évènements A et B est réalisé»,
CàD c'est l'évènement A ou B .
- > L'évènement $A \cap B$ signifie que « A et B sont réalisés simultanément»,
CàD c'est l'évènement A et B .
- > L'évènement \bar{A} est appelé l'évènement contraire de A .
- > On dit que les évènements A et B sont **incompatibles** Ssi $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.

On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Je considère les évènements

- $\omega = \{3\}$ Donc ω c'est l'évènement élémentaire : "Le résultat du lancé est égal à 3."
- $A = \{1, 2, 3\}$ Donc A c'est l'évènement : "Le résultat du lancé est égal à 1,2 ou 3."
- $B = \{2, 4, 6\}$ Donc B c'est l'évènement : "Le résultat du lancé est pair."

On a clairement

$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$ et comme $B \cap \{\omega\} = \{2, 4, 6\} \cap \{3\} = \emptyset$ alors B et $\{\omega\}$ sont incompatibles.

Exemple 2

Considérons une urne, qui contient a boules blanches et b boules noires.

On tire n boules de cette urne, avec remise entre les tirages.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notons B_i (resp. N_i) l'évènement «la i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)».

Alors

- > $\bigcap_{i=1}^n N_i$ c'est l'évènement
- > $\bigcup_{i=1}^n B_i$ est l'évènement
- > $\bigcup_{i=1}^{n-1} (B_i \cap B_{i+1})$ est l'évènement

2 Probabilité.

2.1 Définition.

Définition 4. Définition d'une probabilité

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.

Une probabilité \mathbb{P} sur l'univers Ω , c'est une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$

Ainsi Comme $A \subset \Omega$ est un évènement alors on peut calculer $\mathbb{P}(A)$

De plus la fonction \mathbb{P} a les propriétés suivantes.

> $\mathbb{P}(A)$ est un nombre dans $[0, 1]$.

> $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

> Lorsque les évènements A et B sont incompatibles, CàD $A \cap B = \emptyset$

alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le couple (Ω, \mathbb{P}) est appelé un espace probabilisé.

Vocabulaire.

> Lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que l'évènement A est certain.

> Lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que l'évènement A est impossible.

Théorème 5. Formulaire

On a

> Lorsque $A \subset B$ alors $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$.

> $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

> $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

> $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$

Lorsque de plus les évènements $(A_1, \dots, A_n)_{k \in I}$ sont 2 à 2 incompatibles (ou disjoint),

alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

2.2 Probabilité uniforme.

Théorème 6. Probabilité Uniforme

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.
On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ est de cardinal fini, CàD $\text{card}(\Omega) = N < +\infty$.

Alors il existe une (unique) probabilité \mathbb{P} telle que
tous les évènements élémentaires ω_k sont équiprobable,
CàD ont la même probabilité égale à $1/N$,

$$\text{Alors on a : } \forall \omega \in \Omega, \text{ on a } \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

On dit que \mathbb{P} est la probabilité uniforme.

De plus on a

$$\text{Si } A \subset \Omega \text{ alors } \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Favorable}}{\text{Possible}}$$

Démonstration : Démonstration du "de plus"

L'évènement A c'est l'ensemble donc c'est la réunion disjointe de ses éléments, ainsi $A = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{\omega_1, \dots, \omega_p\}) \\ &= \sum_{k=1}^p \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = p \cdot \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \text{card}(A) \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \end{aligned}$$

Fini \square

Exemple 1.

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.

On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On suppose que le dé est non pipé donc les probabilités de chaque face sont égales donc on choisit la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Je considère

A c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un diviseur de 6

B c'est l'évènement : Le résultat du lancé est pair

$$\text{On a } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 6\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2.

On regarde le jour de naissance d'une personne.

On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 364, 365\}$.

On suppose que tous les jours sont équiprobables (en réalité, c'est faux) donc on choisit la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Je considère

A c'est l'évènement : être né au mois de Janvier

B c'est l'évènement : être né le 03 du mois

C c'est l'évènement : être né le même jour que moi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{31}{365} \approx 0.085, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{12}{365} \approx 0.033, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{\text{Fav}}{\text{Pos}} = \frac{1}{365} \approx 0.003$$

2.3 Probabilité conditionnelle.

Définition 7. Probabilité conditionnelle

On considère (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé, CàD une expérience avec une modélisation ainsi on a Ω l'univers des possibles et on a choisi et fixé une probabilité \mathbb{P} sur Ω

On suppose que $B \subset \Omega$ est un évènement avec $\mathbb{P}(B) > 0$

La probabilité conditionnelle de A sachant B , noté $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \text{ sachant } B)$, c'est

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ mesurent les interférences, les interactions entre les évènements A et B .

On peut remarquer que la fonction $A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur B .

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces un fois et on regarde le résultat.

On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On suppose que le dé est non pipé donc les probabilités de chaque face sont égales donc on choisit la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Je considère

A c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un diviseur de 6

B c'est l'évènement : Le résultat du lancé est un nombre premier

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ avec la définition.

$$\text{On a } \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ en situation.

Exemple 2

On regarde le jour de naissance d'une personne.

On a donc ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 364, 365\}$.

On suppose que tous les jours sont équiprobables (en réalité, c'est faux) donc on choisit la probabilité uniforme \mathbb{P} .

Je considère

A c'est l'évènement : être né dans un mois qui fini par "bre"

B c'est l'évènement : être né le 30 du mois

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ avec la définition.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/365}{11/365} = \frac{4}{11} \text{ ET } \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4/365}{122/365} = \frac{4}{122} = \frac{2}{61}$$

Calcul de $\mathbb{P}_B(A)$ en situation.

2.4 Indépendance

Définition 8. Évènements indépendants

On considère (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé, càd une expérience avec une modélisation et une probabilité.

On suppose que $A, B, C \subset \Omega$ sont des évènements

> On dit que les évènements A et B sont indépendants Ssi on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

> On dit que les évènements A, B, C sont indépendants Ssi on a

$$A, B, C \text{ sont 2 à 2 indépendants ET } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Attention : A, B, C sont 2 à 2 indépendants ~~⇒~~ $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

Interprétation et explication du vocabulaire.

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ mesurent les interférences, les interactions entre les évènements A et B .

Quand $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) \text{ et de même } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$$

donc la probabilité de l'un n'est pas influencée par la réalisation (ou non) de l'autre

C'est pour cela que l'on parle d'évènement indépendant

3 Les théorèmes classiques.

Définition 9. Système complet d'évènements

On considère une expérience avec une modélisation et on note Ω l'univers des possibles.

On considère A_1, A_2, \dots, A_n des évènements.

On dit que (A_1, A_2, \dots, A_n) forment un système complet d'évènements

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ et les } (A_i) \text{ sont 2 à 2 incompatibles (CàD partition noté } \Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i)$$

Exemple fondamental. Soit A un évènement

Alors la paire $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'évènements

Théorème 10.

On considère (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé, CàD une expérience avec une modélisation et une probabilité.

> **Formule des probabilités composées**

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \text{ et } A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \text{ et } \dots \text{ et } A_{n-1}}(A_n)$$

> **Formule des probabilités totales avec un système complet**

Soit $(A_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ un système complet d'évènement, on a alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Exemple classique :

Comme le couple (A, \bar{A}) est système complet d'évènement, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

> **Formule de Bayes**

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration :

Démonstration de la formule des probabilités composées

De la formule des probabilités conditionnelles, on déduit que $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \mathbb{P}(\square \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(\square) \mathbb{P}_{\square}(A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \end{aligned}$$

De même $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1})$

On replace et on recommence.

Formule des probabilités totales avec un système complet

Comme $\Omega = \bigcup_{k=1}^{k=n} A_k$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}\left[B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{k=n} (B \cap A_k)\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Démonstration de la formule de Bayes

De la formule des probabilités conditionnelles, on déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}_B(A)$$

4 Exercices.

Les évènements

Exercice 1. Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé fini.

On note alors C l'évènement « un et un seul des évènements A ou B est réalisé ».

Trouver la relation ensemble entre A, B, C . En déduire que : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 2. [Correction] On considère deux évènements A et B .

1. On suppose que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(a) Montrer que : $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) - [\mathbb{P}(A)]^2$

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], x - x^2 \leq 1/4$.

En déduire que : $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$

(c) Pourquoi en fait cette inégalité est-elle valide sans la condition $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

2. On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$

(a) Calculer $\mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

(b) En déduire que : $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$

Exercice 3. On suppose que les évènements A et B sont indépendants

Montrer qu'alors les évènements A et \bar{B} sont indépendants (de même que \bar{A} et B , ainsi que \bar{A} et \bar{B})

Proba uniforme, CàD $\frac{\text{Favorable}}{\text{Totale}}$

Exercice 4. On lance 6 fois un dé équilibré.

On modélise l'expérience en regardant la liste des résultats des lancers, CàD $\omega = (D_1, D_2, \dots, D_6)$

Comme le dé est équilibré, c'est bien équiprobable

1. Décrire Ω et déterminer $\text{card}(\Omega)$

2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6 fois le même nombre ?

3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une fois chaque face ?

4. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 2 deux et 4 quatre ?

5. Quelle est la probabilité que la plus grande valeur soit ≤ 4 ? que la plus grande valeur soit égale à 4 ?

Exercice 5. On tire/distribue trois cartes dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

1. lorsque les cartes sont tirées simultanément

les mains sont-elle équiprobables. Combien y-a-il de main différente, CàD déterminer $\text{card}(\Omega)$

Calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur.

2. Lorsque les cartes sont tirées successivement,

les mains sont-elle équiprobables. Combien y-a-il de main différente, CàD déterminer $\text{card}(\Omega)$

Calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur.

 Classique

Exercice 6.

- Optimisme préalable** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue n parties à un jeu avec une probabilité $1/100$ de gagner. Déterminer p_n la probabilité de gagner puis N tel que $P_N \geq 1/2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue n parties à un jeu avec une probabilité $1/n$ de gagner. Déterminer p_n la probabilité de gagner puis $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Exercice 7. Paradoxe des anniversaires. En MPSI, il y a 30 élèves.

- Calculer la probabilité que moins un autre MPSI soit né le même jour que vous.
- Calculer la probabilité que moins 2 élèves de MPSI soient né le même jour.

Exercice 8. La feuille d'exercices du prof contient exactement 4 fautes, notée F_1, F_2, F_3, F_4 . Les 30 élèves font complètement et indépendamment la feuille d'exercices. Chacun détecte une faute avec une probabilité $p = 1/20$.

- Déterminer la probabilité que la faute F_1 soient détectées.
- Déterminer la probabilité que toutes les fautes soient détectées.

Exercice 9. On possède 100 dès d'apparence identique.

- > 75 sont normaux (les faces sont équiprobables).
- > 25 sont pipés : le 6 a une chance sur deux d'apparaître.

- On prend un dès au hasard, et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6.
- On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dès soit pipé.
- On relance et on obtient, à nouveau un 6. Quelle est la probabilité que le dès soit pipé.

Exercice 10. [Correction] On fixe un entier $n \geq 2$

On considère $n+1$ urne notée U_0, U_1, \dots, U_n .

On suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.

On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on tire 2 boules sans remise.

On considère les évènements

A_k : J'ai choisi l'urne U_k

B : J'ai tiré 2 boules blanches

- Calculer $\mathbb{P}_{A_k}(B)$.
- Vérifier que $\mathbb{P}(B) = 1/3$

Exercice 11. On considère une chaînes de n individus numérotés de 1 à n . On va suivre la transmission d'une message le long de cette chaînes.

> Si un individu dispose du message M . alors il peut soit transmettre correctement le message M , soit mentir et transmettre le message \overline{M} .

> Si un individu dispose du message \overline{M} alors il peut soit transmettre correctement le message \overline{M} , soit mentir et transmettre le message $\overline{\overline{M}} = M$.

De plus les individus mentent avec une probabilité p .

On note T_k l'évènement " l'individu k a reçu le message M ".

- Calculer $\mathbb{P}(T_{k+1})$ en fonction $\mathbb{P}(T_k)$.
- Calculer $\mathbb{P}(T_k)$ (au départ l'individu 1 dispose du message M).
- Calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_k)$. Une information relayée par un grand nombre de personne est-elle fiable ?

————— Plus difficile —————

Exercice 12. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Voici un jeu organisé en 2 étapes.

> Étape 1. On joue à pile ou face avec un pièce équilibré au plus n fois. Le jeu s'arrête dès que l'on obtient pile ou bien quand on atteint le maximum des n lancers réglementaires

> Étape 2. On dispose d'une urne avec une boule Blanche. On ajoute dans cette urne autant de boule noire que l'on a obtenu de face dans l'étape 1. On tire une boule.

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"

- (a) On suppose que $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Calculer la probabilité $a_{k,n}$ d'obtenir k face puis une fois pile à la première étape.
- (b) Calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

2. Limite quand $n \rightarrow \infty$.

- (a) Démontrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$
- (b) En déduire que : $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2$ Rq $\ln 2 \approx 0.69$

Exercice 13. [Correction] On joue à un jeu avec une probabilité de gagner égale à $2/3$.

On note p_k la probabilité de l'évènement

$$C_k : \begin{cases} \text{j'ai gagné les } k\text{-ième et } (k+1)\text{-ième parties} \\ \text{Et c'était la première fois que je gagnai deux parties consécutives} \end{cases}$$

- 1. Calculer p_2 et p_3 .
- 2. On note G_1 l'évènement : "J'ai gagné la première partie".

Montrer que : $\mathbb{P}_{G_1}(C_{k+2}) = \frac{1}{3} p_k$ ET $\mathbb{P}_{G_1^c}(C_{k+2}) = p_{k+1}$

- 3. En déduire p_{n+2} en fonction p_{n+1} et p_n .
- 4. Calculer p_n .

Exercice 14. [Correction] Deux joueurs s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face.

Ils possèdent initialement un montant a et b respectivement, et à chaque victoire le perdant donne un euro au gagnant. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.

On pose $N = a + b$.

Pour $a \in \{0, 1, \dots, N\}$ on note p_a la probabilité que le joueur 1 rafle tout s'il commence avec a euros.

- 1. Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = p p_{a+1} + q p_{a-1}$.
En déduire l'expression de p_a .
- 2. Calculer de même q_b la probabilité que le joueur 2 gagne.
- 3. Y-a-t-il une chance pour que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 15. On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet

- > 3 descendants avec la probabilité $1/8$.
- > 2 descendant avec la probabilité $3/8$.
- > 1 descendant avec la probabilité $3/8$.
- > aucun descendant avec la probabilité $1/8$.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.

- 1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
- 2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n -ième génération.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8} x_n^3 + \frac{3}{8} x_n^2 + \frac{3}{8} x_n + \frac{1}{8}$

- 3. Montrer que la suite (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers $\sqrt{5} - 2 \approx 0.24$.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On suppose que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(a) Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$, ainsi

$$\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)}_{\leq \mathbb{P}(A)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\geq \mathbb{P}(A)} \leq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

(b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{4} - (x - x^2) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Ainsi on a $\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)}_{\leq \mathbb{P}(A)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\geq \mathbb{P}(A)} \leq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \leq 1/4$

(c) Lorsque $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

On reprend le même raisonnement mais en échangeant les rôles de A et B

2. On suppose que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$

(a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{1 - \mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A \cap \bar{B})\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B))} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B)(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}))}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B))} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B))} \end{aligned}$$

(b) Ainsi on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \right| &= \left| \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B)) \right| \left| \mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \left| \mathbb{P}_B(A) - \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \right| \quad \text{car pour tout } x \in [0, 1], \quad 0 \leq x(1-x) = x - x^2 \leq 1/4 \\ &\leq \frac{1}{4} \quad \text{par } \mathbb{P}_B(A) \text{ et } \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \text{ sont dans } [0, 1] \text{ donc leur distance est } \leq 1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) On fixe un entier $n \geq 2$

On considère $n+1$ urne notée U_0, U_1, \dots, U_n .

On suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.

On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on tire 2 boules sans remise.

On considère les évènements

A_k : J'ai choisi l'urne U_k

B : J'ai tiré 2 boules blanches

B_1 : J'ai tiré une boule blanche au tirage 1

B_2 : J'ai tiré une boule blanche au tirage 2

1. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{A_k}(B) &= \mathbb{P}_{A_k}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}_{A_k}(B_1) \mathbb{P}_{A_k \cap B_1}(B_2) \\ &= \frac{k}{n} \quad \frac{k-1}{n-1} \end{aligned}$$

2. On a avec la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (A_0, \dots, A_n) ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \underbrace{0}_{k=0} \\
 &= \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n^3[1+o(1)]} \left(\frac{2n^3[1+o(1)]}{6} \right) \\
 &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{3} [1+o(1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. On considère l'évènement B_n : "À l'étape 2, j'ai tiré l'unique boule Blanche"

(a) Je note C_i l'évènement : J'ai fait face au i -ième lancé. On a

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad a_{k,n} &= \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k \cap \overline{C_{k+1}}) \\ &\text{Les lancers sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(C_1) \mathbb{P}(C_2) \dots \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}(\overline{C_{k+1}}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

De plus $a_{n,n} = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = 1/2^n$.

(b) On note \mathcal{A}_k l'évènement : "J'ai k fois face puis pile", ainsi $\mathbb{P}(\mathcal{A}_k) = a_{k,n}$

Il est clair que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_k}(B_n) = \frac{1}{k+1}$

car lorsque l'évènement \mathcal{A}_k est réalisé, l'urne contient 1 boule blanche et k boules noires.

On applique la formule des probabilité totale avec le système complet $(\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n)$, ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\mathcal{A}_k) \mathbb{P}_{\mathcal{A}_k}(B_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1}{p} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

2. Limite quand $n \rightarrow \infty$.

(a) On fait par récurrence $H_{<n>} : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$

Initialisation $n=1$

On a

$$\int_0^{1/2} \frac{t}{1-t} dt = \begin{cases} \text{On décompose en éléments simples,....} \\ \text{OU bien} \\ \text{Astuce } \frac{t}{1-t} = \frac{t-1+1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$

Méthode classique :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \text{ On applique } H_{<n>} \text{ puis final-Intermédiaire.}$$

Méthode Astucieuse.

$$\int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \frac{t^n \times t}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \frac{t^n(t-1+1)}{1-t} dt = \int_0^{1/2} t^n dt + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}(B_n) - \ln(2) \right| &= \left| -\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \right| \\ &\leq \int_0^{1/2} \left| \frac{t^n}{1-t} \right| dt + \left| \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \right| \\ &\leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \\ &\leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-1/2} dt + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \\ &\leq 2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1/2} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} = 2 \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) On note G_i l'événement : "J'ai gagné la i -ième partie".

1. On a :

$$p_2 = \mathbb{P}\left[\overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3\right] = \mathbb{P}\left[\overline{G_1}\right] \mathbb{P}[G_2] \mathbb{P}[G_3] = \dots \quad \text{car les événements sont indépendants}$$

$$p_3 = \mathbb{P}\left[\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right) \cup \left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right)\right]$$

Les événements sont incompatibles

$$= \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right) + \mathbb{P}\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4\right)$$

2. On a : $C_{k+2} = \left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) \cup \left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right)$, ainsi

$$\mathbb{P}_{G_1}(C_{k+2}) = \mathbb{P}_{G_1}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) = \mathbb{P}\left(\overline{G_2} \cap C_k\right) = \mathbb{P}\left(\overline{G_2}\right) \cdot \mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{3} p_k$$

$$\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(C_{k+2}) = \mathbb{P}_{\overline{G_1}}\left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right) = \mathbb{P}(C_{k+1}) = p_{k+1}$$

3. Formule des probabilités totales avec le systèmes complets $(G_1, \overline{G_1})$
ou bien

$$p_{k+2} = \mathbb{P}(C_{k+2}) = \mathbb{P}\left[\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) \cup \left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right)\right]$$

$$= \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap C_k\right) + \mathbb{P}\left(\overline{G_1} \cap C_{k+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3} p_{k+1}$$

4. Théorie des suites classiques d'ordre 2.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. On considère l'événement

G_a : " Au départ ma fortune au départ est de a euro et j'ai gagné, CàD ruiné l'autre.

D : j'ai gagné le première partie

On a $G_a = (D \cap G_{a+1}) \cup (\overline{D} \cap G_{a-1})$

$$p_a = \mathbb{P}(G_a) = \mathbb{P}\left[(D \cap G_{a+1}) \cup (\overline{D} \cap G_{a-1})\right]$$

$$= \mathbb{P}(D \cap G_{a+1}) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap G_{a-1}) - \mathbb{P}\left[(D \cap G_{a+1}) \cap (\overline{D} \cap G_{a-1})\right]$$

De plus les événements $(D \cap G_{a+1})$ et $(\overline{D} \cap G_{a-1})$ sont incompatibles

en effet $(D \cap G_{a+1}) \cap (\overline{D} \cap G_{a-1}) = D \cap \overline{D} \cap \dots = \emptyset$

De plus les événements D et G_{a+1} sont successif et indépendants donc $\mathbb{P}(D \cap G_{a+1}) = \mathbb{P}(D) \mathbb{P}(G_{a+1}) = p p_{a+1}$

$$\text{Conclusion : } p_a = p p_{a+1} + q p_{a-1}$$

On poursuit utilisant de la théorie classique des suite d'ordre 2.

On calcule les constante avec $p_0 = 0$ et $p_N = 1$.