Espérance, Variance, Dispersion

1 Les outils

1.1 Espérance d'une V.A.

Définition 1. Espérance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'espérance de la V.A. X est définie par la formule

$$E(X) \overset{def}{=} \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$$

cette définition est peu utile (sauf une exception)

Théorème/Formule pratique : On a $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k.\mathbb{P}(X = k)$

`Vocabulaire : Lorsque` $E(X) = 0$`, on dit que la V.A.` X `est centrée.`

La formule pratique se démontre à partir de la définition.

Théorème 2. Formulaire sur l'espérance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X, Y des V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> **Formule du transfert.** Soit f une fonction

$$\text{Alors on a } E\Big(f(X)\Big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

> **V.A. constante.** Si X est la V.A. constante égale à a alors $E(X) = a$

> **Linéarité.** L'espérance est linéaire, on a donc

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y)$$

> **Espérance et produit V.A.** On a

$$E(XY) = \sum k\ell \underbrace{\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)}_{\text{Proba dans la loi conjointe}}$$

En général $E(X.Y) \neq E(X).E(Y)$. Mais

Lorsque X,Y sont des v.a *indépendantes* $\implies E(X.Y) = E(X).E(Y)$

Attention : X n'est pas indépendant de X donc , $E(X^2) = E(X.X) \neq E(X)^2$.

Démonstration : On a la formule $E(X) = \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$.

En effet par définition $X(\omega) \in X(\Omega)$ et l'évènement $X = k$ est la réunion disjointe de tous les singletons ω tel la $X(\omega) = k$.

les démonstrations sont maintenant quasi évidentes.

> Transfert

Par définition $E(f(X)) = \sum_{\text{tous les } \omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega).f(X(\omega))$. Puis on regroupe

> V.A. constante égale à a.

Ici $\forall \omega,\ X(\omega) = a$, ainsi $E(X) = \sum_{\text{tous les } \omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega).X(\omega) = \sum_{\text{tous les } \omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega).a = a\,1 = a$

> Linéarité.

On utilise $E(X) = \sum \mathbb{P}(\omega).X(\omega)$ ainsi que $[aX+b](\omega) = a\,X(\omega) + b$ et $[2X-3Y](\omega) = 2\,X(\omega) - 3\,Y(\omega)$

> Produit.

On a

$$
\begin{aligned}
E(X)\,E(Y) &= \left(\sum k\,\mathbb{P}(X=k)\right)\left(\sum \ell\,\mathbb{P}(Y=\ell)\right) \\
&\quad \textit{On regroupe les sommes en une somme double.} \\
&= \sum k\,\ell\,\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=\ell) \\
&\quad \textit{les V.A. sont indépendantes ainsi} \\
&= \sum k\,\ell\,\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=\ell) = E(X.Y)
\end{aligned}
$$

1.2 Variance d'une V.A.

Théorème 3. Variance

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Je note e l'espérance de X, ainsi $e = E(X)$ est un nombre dans $\mathbb{R}$

> **Def de la variance.** La variance de X, notée $V(X)$ est définie par

$$V(X) = E\left([X-e]^2\right)$$

> **L'indispensable Formule de Huygens.** On a

$$V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = E\left(X^2\right) - e^2$$

Rappel : Avec la formule du transfert, on a : $E\left(X^2\right) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2.\mathbb{P}(X=k)$

Vocabulaire :

Le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'écart type.

Si $V(X) = 1$, on dit que la V.A. X est réduite.

Démonstration : La démonstration est simple, il suffit de partir de la définition puis d'appliquer le formulaire de l'espérance.

$$
\begin{aligned}
\text{On a } V(X) &= E\left([X-e]^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2eX + e^2\right) \\
&\quad \text{On utilise le formulaire de l'espérance} \\
&\quad\quad \text{Sachant que } e \text{ est un nombre} \\
&= E\left(X^2\right) - 2eE(X) + e^2 \\
&\quad \text{Or } E(X) = e \\
&= E\left(X^2\right) - 2e.e + e^2 = E\left(X^2\right) - e^2
\end{aligned}
$$

Théorème 4. Formulaire sur la variance

On considère X une V.A.. à valeurs dans $\mathbb{R}$. on a l'indispensable formule de Huygens

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) - e^2$$

> **Positivité.** La variance est toujours positive, CàD $V(X) \geqslant 0$

> **Dispersion nulle.** La variance mesure la dispersion de la V.A. autour de e CàD
>
> > Lorsque X est la fonction constante égale à a alors $V(X) = 0$.
> >
> > Lorsque $V(X) = 0$ alors la V.A. X est constante égale à e presque surement.

> **Quadratique.** La variance est quadratique

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

> **Variance et somme.** En général $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$
>
> Mais lorsque X, Y sont des v.a indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Attention : X n'est pas indépendant de X donc $V(2X) \neq V(X) + V(X)$.

En effet $V(2X) = V(aX) = a^2 V(X) = 4V(X) \neq V(X) + V(X)$

Démonstration : Pour les démonstrations, on utilisera soit la def soit la formule du transfert.

> Positivité ?

Évident avec la définition et la formule du transfert

$$V(X) = E\left((X-e)^2\right) = \sum_{k\in X(\Omega)} \underbrace{(k-e)^2}_{\geqslant 0} \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

> Dispersion nulle

- Si X est constante égale à a alors $e = E(X) = a$ et $X - e$ est la fonction nulle et donc $V(X) = E\left((X-e)^2\right) = 0$

- Si $V(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} (k-e)^2 \mathbb{P}(X=k) = 0$. C'est une somme nulle de terme positif donc $\forall k,\ (k-e)^2 \mathbb{P}(X=k) = 0$

Si $k \neq e$ alors $\mathbb{P}(X=k) = 0$ et donc $X = k$ est impossible

Conclusion : La seule valeur de X, c'est e.

> Quadratique ?

Je note $X' = aX + b$ et $e = E(X)$

A cause des propriétés de l'espérance, on sait que $E(X') = aE(X) + b = ae + b$

Maintenant on calcule $V(X') = E(X'^2) - \left(E(X')\right)^2 = E'((aX+b)^2) - (ae+b)^2$

On poursuit le calcul comme pour la démonstration de la Formule de Huygens et on obtient

$$V(X') = \ldots.. = a^2\left(E(X^2) - e^2\right) = a^2\, V(X)$$

> Somme ?

On utilise $V(X+Y) = E\left([X+Y]^2\right) - E(X+Y)^2$

> Je note $a = E(X)$ et $b = E(Y)$.

> Comme l'espérance se distribue, on a : $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = a + b$, ainsi on a

$$\begin{aligned}
\text{On a } V(X+Y) &= E\left([X+Y]^2\right) - (a+b)^2 \\
&= E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - \left(a^2 + 2ab + b^2\right)
\end{aligned}$$

On distribue l'espérance.

$$= E\left(X^2\right) + 2E(XY) + E\left(Y^2\right) - \left(a^2 + 2ab + b^2\right)$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X).E(Y) = ab$

$$\begin{aligned}
&= E\left(X^2\right) + 2ab + E\left(Y^2\right) - a^2 - 2ab - b^2 \\
&= \underbrace{E\left(X^2\right) - a^2}_{=V(X)} + \underbrace{E\left(Y^2\right) - b^2}_{=V(Y)} = V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

1.3 Fonction génératrice d'une V.A.

Définition 5.
On suppose que X est une v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ avec $X(\Omega)=\{0,1\}$ ou $X(\Omega)=\{-1,1\}$ ou $X(\Omega)=\{0,1,\dots,n\}$ ou $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

On appelle série génératrice de la V.A. X, la fonction

$$G_X(t)=\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\,t^k$$

Exemples.

> Lorsque $X\sim\mathscr{B}(p)$, CàD la V.A. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors $G_X(t)=\sum_{k=0}^{1}\mathbb{P}(X=k)\,t^k=\underbrace{\overline{p}}_{k=0}+\underbrace{p\,t}_{k=1}=\overline{p}+t\,p$

> Lorsque $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, CàD la V.A. X suit une loi de une binomiale ordre n et de paramètre p

Alors $G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\,t^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\,\overline{p}^{n-k}\,t^k=Bin\hat{o}me=\left(\overline{p}+t\,p\right)^n$

Théorème 6.
La fonction/Série génératrice permet d'obtenir l'espérance et la variance.
En effet, on a

$$E(X)=G'_X(1)\quad\text{et}\quad V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-\left(G'_X(1)\right)^2$$

Démonstration :

> On a $G'_X(t)=\left[\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\,t^k\right]'=\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\,k\,t^{k-1}$

ainsi on a : $E(X)=G'_X(1)$

> On a $G''_X(t)=\left[\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\,t^k\right]''=\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\,k(k-1)\,t^{k-2}$

On ré-organise, ainsi on a : $V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-\left(G'_X(1)\right)^2$

Compléments

> Avec la formule du transfert, on a facilement : $G_X(t)=E\left(t^X\right)$.

> Lorsque X,Y sont deux VA indépendantes, on a

$$G_{X+Y}(t)=E\left(t^{X+Y}\right)=E\left(t^X\,t^Y\right)$$

Comme X,Y sont deux VA indépendantes
Alors t^X,t^Y sont deux VA indépendantes
ainsi on a

$$=E\left(t^X\right).E\left(t^Y\right)$$
$$=G_X(t).G_XY(t)$$

2 Applications aux lois usuelles.

2.1 Bernoulli

Théorème 7.
Soit X une V.A. On suppose $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors on sait que

> $X(\Omega) = \{0,1\}$

> $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = \overline{p}$

> $E(X) = p$ et $V(X) = p.\overline{p}$

> $G_X(t) = \overline{p} + tp$

Démonstration : **Démonstration.**

Comme $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors on sait que (c'est la def) : $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = \overline{p}$.

Ainsi on a : $E(X) = \sum_{k=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{\mathscr{O}}_{k=0} + \underbrace{1.p}_{k=1} = p$

$$V(X) = E(X^2) - e^2$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k)\right] - p^2 = \left(\underbrace{\mathscr{O}}_{k=0} + \underbrace{1.p}_{k=1}\right) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = p.\overline{p}$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(X=k)\, t^k = \underbrace{\overline{p}}_{k=0} + \underbrace{p.t}_{k=1} = \overline{p} + tp$$

2.2 Binomiale

Théorème 8.
Soit X une V.A. On suppose $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Alors on sait que

> $X(\Omega) = \{1,2,\dots,n\}$

> $\forall\, k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k\, \overline{p}^{n-k}$

> $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.\overline{p}$

> $G_X(t) = \left(\overline{p} + tp\right)^n$

Démonstration : **Démonstration.** Comme $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors on sait que (c'est la def) : $X(\Omega) = \{1,2,\dots,n\}$ et $\forall\, k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k\, \overline{p}^{n-k}$

Ainsi on a : $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k\, \overline{p}^{n-k}$

On utilise la formule de Capitaine

$$= \underbrace{\mathscr{O}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k\, \overline{p}^{n-k}$$

On ré-indexe avec $\ell = k-1$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1}\, \overline{p}^{n-\ell-1}$$

$$= np\sum_{\ell=0}^{\square} \binom{\square}{\ell} p^{\ell}\, \overline{p}^{\square-\ell}$$

$$= np\left(p + \overline{p}\right)^{\square} = np$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\, t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\, \overline{p}^{n-k}\, t^k = \left(\overline{p} + tp\right)^n \qquad \text{et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 = n.p.\overline{p}$$

2.3 V.A. centrée réduite.

Théorème 9. Centrée réduite

On considère X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $V(X) > 0$.

On note $e = E(X)$ l'espérance et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ l'écart type

Alors la variable aléatoire $\widetilde{X} = \dfrac{X-e}{\sigma}$ est centrée et réduite

est la VA est centrée et réduite associée à X et on a

$$E\left(\widetilde{X}\right) = 0 \text{ et } V\left(\widetilde{X}\right) = 1$$

Démonstration : La démonstration est simple, il suffit d'appliquer les formulaires

On a $E(\widetilde{X}) = E\left(\dfrac{X-e}{\sigma}\right)$

$= E\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{e}{\sigma}\right)$

On utilise le formulaire de l'espérance

Sachant que e et σ sont des nombres

$= \dfrac{1}{\sigma}E(x) - \dfrac{e}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}e - \dfrac{e}{\sigma} = \mathscr{O}$

et $V(\widetilde{X}) = V\left(\dfrac{X-e}{\sigma}\right)$

$= V\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{e}{\sigma}\right)$

On utilise le formulaire de la variance

Sachant que e et σ sont des nombres

$= \dfrac{1}{\sigma^2}V(x) = \dfrac{1}{V(x)}V(x) = 1$

Exemple : Centrée réduite d'une Bernoulli de paramètre $p = {}^1/_2$

On suppose que $X \sim \mathscr{B}\left({}^1/_2\right)$, ainsi on a $e = E(X) = p = {}^1/_2$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.\overline{p}} = \sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2$

La centrée réduite est $\widetilde{X} = \dfrac{X-e}{\sigma} = \dfrac{X - {}^1/_2}{{}^1/_2} = 2X - 1$ et on a

Quand $X = 1$ alors $\widetilde{X} = 2X - 1 = 1$

Quand $X = 0$ alors $\widetilde{X} = 2X - 1 = -1$

Donc $\widetilde{X}(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(\widetilde{X} = 1) = {}^1/_2$ et $\mathbb{P}(\widetilde{X} = -1) = {}^1/_2$

`On dit que` $\widetilde{X}$ `suit une loi de Rademacher`

Exemple : Centrée réduite d'une Binomiale d'ordre n et de paramètre $p = {}^1/_2$

On suppose que $X \sim \mathscr{B}\left(n, {}^1/_2\right)$, ainsi on a $e = E(X) = np = \dfrac{n}{2}$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np.\overline{p}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$

La centrée réduite est $\widetilde{X} = \dfrac{X-e}{\sigma} = \dfrac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}$

3 Interprétation : Dispersion-Concentration.

3.1 Markov.

Théorème 10. Inégalité de Markov

On considère X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

$$\text{On a : } \forall\ M > 0,\ \mathbb{P}\Big(X \geqslant M\Big) \leqslant \frac{E(X)}{M}$$

Interprétation : la probabilité que $X(\omega)$ soit grand est de plus en plus faible.

Démonstration : Pour tout $M > 0$, on a $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k.\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{M-1} k.\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=M}^{\to +\infty} k.\mathbb{P}(X=k)$

$\geqslant \sum_{k=0}^{M-1} 0.\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=M}^{+\infty} M.\mathbb{P}(X=k)$

$\geqslant 0 + M \sum_{k=M}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)$

Or $[X \geqslant M]$ est la réunion disjointe de $[X=M]$ et de $[X=M+1]$ et de $[X=M+1]$ et de ....

$\geqslant M.\mathbb{P}(X \geqslant M)$

3.2 Bienaimé-Chebychev.

Soit X une VA à valeurs $\mathbb{R}$. On note e sont espérance.

On applique l'inégalité de Markov avec la VA $Y = (X-e)^2$ **et la constante** M^2

Ainsi on obtient $\mathbb{P}\left[(X-e)^2 \geqslant M^2\right] \leqslant \dfrac{E\left[(X-e)^2\right]}{M^2}$

De plus on a

$V(X) = E\left[(X-e)^2\right]$

ET on a l'égalité entre évènement : $(X-e)^2 \geqslant M^2 \iff |X-e| \geqslant M$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}\Big[\,|X-e| \geqslant M\Big] \leqslant \frac{V(X)}{M^2}$$ C'est l'inégalité de Bienaimé-Chebychev

3.3 Intervalle de confiance.

On note $\sigma = \sqrt{V(x)}$, l'écart type.

On applique l'inégalité Bienaimé-Chebychev avec $M = c.\sigma$, ainsi on a

L'inégalité de Bienaimé-Chebychev devient : $\mathbb{P}\Big[\,|X-e| \geqslant c.\sigma\Big] \leqslant \dfrac{1}{c^2}$

CàD la probabilité d'avoir un résultat $X(\omega) \notin \Big[e - c.\sigma, e + c.\sigma\Big]$ est $\leqslant \dfrac{1}{c^2}$

Interprétation :

La probabilité d'avoir une résultat loin de l'espérance `à plus de 5 écarts types` est $\leqslant 5\%$

La probabilité d'avoir une résultat proche de l'espérance `à moins de 3 écart type` est $\geqslant 89\%$

3.4 Concentration.

On répète n fois et indépendamment la V.A. X et je les note $X_1, ..., X_n$

On considère $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne des résultats obtenues.

$$\boxed{\text{On alors : } E(M_n) = e \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}}$$

Interprétation : Comme $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

on dit que en moyenne les résultats se concentrent sur l'espérance.

4 Covariance de 2 V.A.

Définition 11. covariance

On considère deux V.A. X et Y

On définit la covariance de X, Y noté $cov(X,Y)$ par la formule

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Rappel : on a : $E(X.Y) = \sum_{(k,k')\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} k\,k'\,\mathbb{P}(X = k \; et \; Y = k')$

Lorsque X, Y sont deux V.A. indépendantes alors $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ et donc $cov(X,Y) = 0$

Moralité : la covariance mesure le degré d'indépendance.

Théorème 12. Formulaire sur la covariance

> La covariance $cov(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, symétrique et $cov(X,X) = V(X)$

> $V(X+Y) = V(X) + 2.cov(X,Y) + V(Y)$

> Lorsque les V.A. X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$

et avec la formule précédente, on retrouve $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Attention : indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$ mais $cov(X,Y) = 0 \not\Longrightarrow$ indépendantes.

> Kulture. Il y a une analogie entre :

- d'une part $cov(X,Y)$ et produit scalaire $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>$
- d'autre part $V(X)$ et norme $||\overrightarrow{u}||^2$

Cependant $V(X) = 0 \Longrightarrow$ la V.A. X est simplement constante. (et pas forcément nulle.)

Démonstration :

$cov(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire ?

On utilise la def de la covariance et la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
cov(aX+bX',Y) &= E\big((aX+bX').Y\big) - E\big((aX+bX')\big).E(Y)\\
&= E\big((a(XY)+b(X'Y))\big) - \big[aE(X)+bE(X')\big].E(Y)\\
&= a\,E(X\,Y) + b\,E(X'\,Y) - a\,E(X).E(Y) - b\,E(X').E(Y)\\
&= a\,[E(X\,Y) - E(X).E(Y)] + b\,\big[E(X'\,Y) - E(X').E(Y)\big]\\
&= a\,cov(X,Y) + b\,cov(X',Y)
\end{aligned}$$

De même pour $cov(X, \alpha\,Y + \beta Y')$

$cov(\cdot,\cdot)$ est symétrique ?

Par définition $cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

$cov(Y.X) = E(Y,X) - E(Y).E(X)$

Donc c'est bien égale.

$V(X+Y) = V(X) + 2.cov(X,Y) + V(Y)$?

On applique la formule $cov(\square,\square) = V(\square)$ avec $\square = X+Y$ et on utilise la bilinéarité et la symétrie de la covariance

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= cov(X+Y, X+Y)\\
&\quad \textit{On utilise la bilinéarité}\\
&= cov(X,X) + cov(X,Y) + cov(Y,X) + cov(Y,Y)\\
&= V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

5 Exercices

Exercice 1. [Correction] Une urne contient une boule blanche et $n-1$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise.
On note X le rang de sortie de la première boule blanche.
On note B_i l'évènement : "J'ai tiré une boule blanche au tirage numéro i

1. Déterminer $X(\Omega)$ et exprimer $X=k$ à l'aide des B_i
   En déduire la loi de X puis calculer $E(X)$.
2. Même question avec : Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges

Exercice 2. [Correction] On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3. [Correction] Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble avec $k \in \mathbb{N}^*$.
Au rez-de-chaussée, n personnes $p_1, \ldots p_n$ entrent dans l'ascenseur, et chacune descend à un étage donné avec probabilité $1/k$ indépendamment du choix de ses voisins.
On suppose de plus que personne ne monte dans l'ascenseur aux étages.
On note X_i la variable valant 1 Si «l'ascenseur s'arrête à l'étage i» et 0 sinon
et X le nombre total d'arrêts de l'ascenseur.

1. Pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, exprimer l'évènement $X_i=0$ à l'aide des évènement A_k : la personne p_k descente à l'étage i
   En déduire que la V.A. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=1-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^n$.
2. Exprimer X à l'aide des $(X_i)_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$. En déduire $E(X)$

Exercice 4. Un téléphone contient $n \geqslant 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer le support de X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_k=1)$ et $\mathbb{P}(X_k=k)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \mathbb{P}(X_{k+1}=i)=\dfrac{i}{n}\mathbb{P}(X_k=i)+\dfrac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(X_k=i-1)$
4. Donner alors une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$, puis l'expression générale de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 5. [Correction]

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine $\mathcal{O}$ par bonds successifs d'une ou deux unités suivant la procédure suivante :

> Au départ, la puce est en $\mathcal{O}$.

> Si, à un instant la puce est au point d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera en k+1 avec probabilité $1/2$ ou en k+2 avec probabilité $1/2$.

> Les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
   Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.
2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
   Exprimer X_n en fonction de S_n.
   En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. On note Y_n la V.A. égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n.
   (a) Déterminer les valeurs prises par Y_n.
   (b) Montrer que pour tout entier $n>2$ et tout entier $k>1$.

$$\mathbb{P}(Y_n=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1}=k-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1)$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

(d) Trouver une solution particulière de $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n + 1$ de la forme $\lambda \times n$. En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$

Exercice 6. Soit $n \geqslant n$, soit r tel que $0 \leqslant r \leqslant n$.

Un placard contient n paires de chaussures.
On tire, au hasard, 2r chaussures du placard.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotées de 1 à n.
Pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$,
on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 7. [Correction] Exercice plus difficile et surtout la question Q4 est technique.

Soit r un entier naturel non nul.
On dispose d'un sac contenant r jetons numérotés de 1 à r dans lequel on peut effectuer une succession de tirages **avec remise** en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.
Pour tout entier naturel n non nul,
on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.
Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer le support de T_n et calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$.
2. Vérifier que : $\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2}\dfrac{2^n - 2}{r^n}$.
3. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant k \leqslant r$.
   Déterminer une relation entre $\mathbb{P}(T_{n+1} = k)$, $\mathbb{P}(T_n = k)$ et $\mathbb{P}(T_n = k-1)$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction génératrice $G_n(X)$ de la V.A. T_n

$$\text{CàD} \quad G_n(X) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(T_n = k)X^k$$

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $G_{n+1}(X) = \frac{1}{r}(X - X^2)\,G'_n(X) + X\,G_n(X)$

   (b) On sait que : $E(T_n) = G'_n(1)$.
   Exprimer $E(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$, r et n.

   (c) Déterminer ensuite $E(T_n)$ en fonction de r et n.