Exercice 1. [Correction] Soit f une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère la suite (I_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n\, dt$

1. *On suppose dans cette question que f est $\mathscr{C}^1$.*
   À l'aide d'une IPP, montrer que : $I_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n+1} + \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   Conclusion : Quand f est $\mathscr{C}^1$, on a $I_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + \mathscr{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. *On suppose dans cette question que f est seulement $\mathscr{C}^0$.*
   Soit $\varepsilon > 0$
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que : $\left|I_n - \dfrac{f(1)}{n+1}\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty \displaystyle\int_0^\alpha t^n\, dt + \dfrac{\varepsilon}{n+1}$
   (b) En déduire la limite de $\Big((n+1)I_n\Big)$ puis que $I_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   Conclusion : Quand f est $\mathscr{C}^0$, on a $I_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$, on définit la famille de complexes $(c_k)_{k\in\mathbb{C}}$ par

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\ \mathrm{d}t$$

Pour la suite, on fixe x_0 un nombre réel de $[-\pi,\pi]$.

1. Que dire de la famille (c_k), si f est une fonction paire ? Si f est une fonction impaire ?
2. Pour x un réel fixé et $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$S_n(f,x) = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell(f)e^{-i\ell x}$$
   (a) On note $\mathbf{1}$, la fonction $\mathbf{1} : x \longmapsto 1$.
   Calculer $C_\ell(\mathbf{1})$ et vérifier que : $\forall\, x,\ S_n(\mathbf{1},x) = 1$.
   (b) Montrer que $S_n(f,x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)}\mathrm{d}t$
   (c) Montrer que
$$S_n(f,x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - f(x_0)\right]\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)}\mathrm{d}t$$
3. Calcul de la limite de $S_n(f,x)$.
   (a) Montrer que la fonction $g_{x_0} : t \mapsto \dfrac{f(t) - f(x_0)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x_0 - t)\right)}$ se prolonge en une fonction continue $\mathrm{sur}[-\pi,\pi]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]\setminus\{x_0\}$.
   (b) Montrer que si $a < b$ et u fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(t)e^{int}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   (c) Soit $c \in [a,b]$.
   Montrer que le résultat de la question précédente reste avec g continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]\backslash\{c\}$.
   Indication : $[a,b] = [a, c-\epsilon] \cup [c-\epsilon, c+\epsilon] \cup [c+\epsilon, b]$
   (d) Soit x_0 fixé. Montrer que : $S_n(f,x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$