

Intégration

1 Compléments.	1	4.1 Fonction définie par une intégrale.	5
1.1 Fonction en escalier.	1	4.2 Lien entre primitive et intégrale.	7
1.2 Continue Par Morceau : \mathcal{C}_{pm}	2	5 Primitivation des DL.	8
1.3 Norme infinie	3	6 Somme de Riemann	9
2 Construction idéale de $\int_a^b f(t) dt$	3	7 Taylor et applications.	10
3 À méditer.	4	7.1 Les formules de Taylor.	10
3.1 Les théorèmes avec 3-4 hypothèses.	4	7.2 Application aux DL : Taylor-Young.	11
3.2 Le lemme de Lebesgue.	4	7.3 Application aux séries Taylor.	11
3.3 Un exemple de développement asymptotique.	4	8 Annexes.	12
3.4 Le théorème de la moyenne.	4	8.1 Annexe : L'uniforme continuité.	12
4 Fonction définie par une intégrale.	5	8.2 Densité des fonctions CC^1 , des fonctions en es-	13
		calier	13
		8.3 Constructions de l'intégrale.	13

1 Compléments.

1.1 Fonction en escalier.

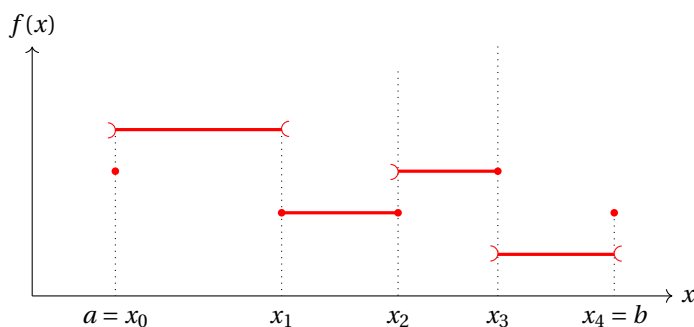
Définition 1. Continue par morceaux

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un **segment** et à valeurs \mathbb{R} .

On dit que la fonction f est *en escalier* s'il existe un entier n et des réels

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

vérifiant : la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est constante.



Exemples de fonction en escalier sur \mathbb{R}

En physique la fonction échelon est une fonction en escalier

En math la fonction partie entière est une fonction en escalier

(Ici il y a une infinité de valeurs différentes mais on est sur \mathbb{R} et chacune est "isolé")

Théorème 2. Propriétés des fonctions en escalier

Soit f une fonction en escalier sur un segment.

> f prend un nombre **fini** de valeur différente

Donc la fonction f est majorée/minorée/bornée sur le segment.

> $\int_a^b f(t) dt$ existe et est égale à l'aire algébrique, CàD de plein de rectangle.

> Une fonction en escalier n'admet pas de primitive

(RA + thm de prolongement \mathcal{C}^1)

1.2 Continue Par Morceau : \mathcal{C}_{pm} .

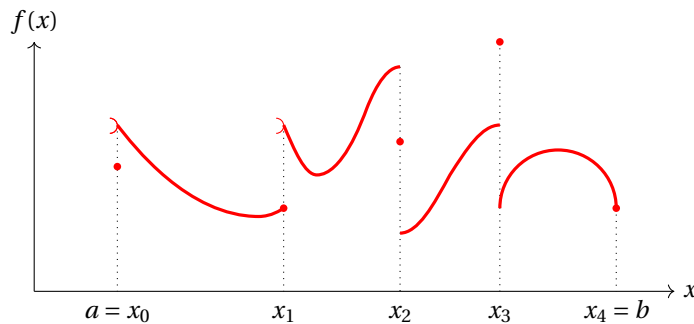
Définition 3. Continue par morceaux

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un **segment** et à valeurs \mathbb{R} .

On dit que la fonction f est *continue par morceaux*, noté \mathcal{C}_m ou \mathcal{C}_m^0 , s'il existe un entier n et des réels

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

vérifiant : la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est continue ET admet un prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.



Exemple : Une fonction continue par morceaux avec $n = 4$.

Le prolongement sur chaque segment est indépendant de la valeur réelle de la fonction en chaque point x_0, \dots, x_n .

Théorème 4. Caractérisation et propriétés des fonctions \mathcal{C}_{pm}

Soit h une fonction de \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{R} .

> La fonction h est continue par morceau sur \mathcal{D} , noté \mathcal{C}_{pm} ,

Ssi la fonction h est la somme

- ⊙ D'une fonction continue f
- ⊙ D'une fonction en escalier g

Lorsque h est continue par morceau sur le segment $[a, b]$, alors

> La fonction h est majorée/minorée/bornée sur le segment.

> l'intégrale $\int_a^b h(t) dt$ se calcule.

> Une fonction $h \in \mathcal{C}_{pm}$ avec des discontinuités n'a pas de primitive.

1.3 Norme infinie

Définition 5.

Soit f une fonction de \mathcal{D} à valeur dans \mathbb{R}

La norme infinie de f sur \mathcal{D} , notée $\|f\|_{\infty, \mathcal{D}}$ ou $\|f\|_{\infty}$, c'est

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty, \mathcal{D}} = \sup (|f(t)| \text{ avec } t \in \mathcal{D})$$

Rappel :

> la borne sup, notée sup, c'est le majorant optimal de $|f(t)|$ sur \mathcal{D}

Donc $\|f\|_{\infty}$ est un majorant naturel de $|f(t)|$ sur \mathcal{D}
Et $\|f\|_{\infty}$ ne dépend pas de t

> Sauf argument $\|f\|_{\infty} = +\infty$, CàD le fonction f n'est pas bornée

Conclusion : Avant de manipuler, d'utiliser $\|f\|_{\infty}$
il faut justifier c'est un nombre fini

Théorème 6. propriétés de $\|f\|_{\infty}$

> Si/lorsque f est \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}_{pm} sur un segment, alors $\|f\|_{\infty}$ est fini

Si/lorsque f est \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}_{pm} sur un \mathbb{R} et $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, alors $\|f\|_{\infty}$ est fini.

> $\forall t \in \mathcal{D}, |f(t)| \leq \|f\|_{\infty}$

On suppose que la fonction f est \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$

Alors la fonction f' est \mathcal{C}^0 sur le segment $[a, b]$

Alors $\|f'\|_{\infty}$ existe

CCL le TAF assure que : la fonction f est lipschitzienne

2 Construction idéale de $\int_a^b f(t) dt$

3 À méditer.

3.1 Les théorèmes avec 3-4 hypothèses.

Les résultats sont au programme

THM TROIS HYP. On suppose :

f est \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$
 $f \geq 0$ sur $[a, b]$
 $\int_a^b f(t) dt = 0$
 Alors f est la fonction nulle.

THM QUATRE HYP. On suppose :

f est \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$
 $f \geq 0$ sur $[a, b]$
 f n'est pas la fonction nulle.
 Les bornes sont croissantes
 Alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

3.2 Le lemme de Lebesgue.

Classique MAIS HORS programme donc à re-démontrer

Soit f une fonction \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ alors

$$\text{Alors } I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Complément : le théorème est vrai/valide lorsque f est seulement continue
 Mais la démonstration est bien plus délicate (Densité + final de Cesàro)*

3.3 Un exemple de développement asymptotique.

C'est un exemple donc pas de théorème

Soit f une fonction \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 .

On considère $I_n = \int_0^1 f(t) t^n dt$

1. Montrer que : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2. On suppose que f est \mathcal{C}^1 . À l'aide d'une IPP, montrez que : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$

*Complément : le résultat est vrai/valide lorsque f est seulement continue
 Mais la démonstration est bien plus délicate (Découpage fin + final de Cesàro)*

3. On suppose que f est \mathcal{C}^2 . À l'aide d'une autre IPP, montrez que : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{f(1)}{(n+1)} + \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

3.4 Le théorème de la moyenne.

Ce résultat est potentiellement très utile
 MAIS Absolument HORS programme

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

$$\text{Alors il existe } c \in]a, b[, \int_0^b f(t) dt = f(c).(b-a)$$

4 Fonction définie par une intégrale.

4.1 Fonction définie par une intégrale.

Théorème 7.

Soit f une fonction définie et \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}_{pm}^0 sur $[a, b]$ et soit $\alpha \in [a, b]$

On considère la fonction h définie par l'expression $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$.

Alors la fonction h est définie sur $[a, b]$

Démonstration : Soit $x \in [a, b]$. Comme la fonction f est \mathcal{C}_{pm} sur $[\alpha, x] \subset [a, b]$,

On peut calculer le nombre $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$

Si la fonction $f : t \mapsto f(t)$ est \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}_{pm}^0

Théorème 8.

Soit f une fonction définie et \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}_{pm}^0 sur $[a, b]$ et soit $\alpha \in [a, b]$

On considère la fonction h définie par l'expression $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$.

Alors la fonction h est continue (et même $\|f\|_{\infty}$ -lipschitzienne sur $[a, b]$)

Démonstration : Comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, on sait que $\|f\|_{\infty} < \infty$.

Ainsi pour tout $[x, x'] \in [a, b]^2$, on a

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x')| &= \left| \int_{\alpha}^x f(t) dt - \int_{\alpha}^{x'} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \\ &\quad \text{Inégalité triangulaire.} \\ &\leq \left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right| \\ &\quad \text{Majoration brutale de } |f(t)| \text{ par } \|f\|_{\infty} \\ &\leq \left| \int_{x'}^x \|f\|_{\infty} dt \right| = \left| \|f\|_{\infty} (x - x') \right| = \|f\|_{\infty} |x - x'| \end{aligned}$$

Théorème 9.

Soit f une fonction définie et \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$ et soit $\alpha \in [a, b]$

On considère la fonction h définie par l'expression $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$.

Alors la fonction h est dérivable sur $[a, b]$

et $\forall x \in [a, b], h'(x) = f(x)$.

Démonstration : Pour tout $c \in [a, b]$, on va montrer à l'aide du théorème du module que le taux de variation de h en a tend vers $f(a)$ quand $x \rightarrow a$.
 Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{h(x) - h(a)}{x - a} - f(a) \right| &= \left| \frac{h(a+h) - h(a)}{h} - f(a) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt - f(a) \right| \\ &\quad \text{Astuce } f(a) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(a) dt \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(a) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} (f(t) - f(a)) dt \right| \\ &\quad \text{Inégalité triangulaire.} \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} |f(t) - f(a)| dt \right| \end{aligned}$$

Démonstration avec l'hypothèse supplémentaire : la fonction f est K -lipschitzienne.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } |f(t) - f(a)| \leq K|t - a| \text{ et } \left| \frac{h(a+h) - h(a)}{h} - f(a) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} K|t - a| dt \right| \\ &\quad \text{Comme } t \in [a, a+h], \text{ on a } |t - a| = \text{distance} \leq |h| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} K|h| dt \right| \\ &= \left| \int_a^{a+h} K dt \right| = K|h| \end{aligned}$$

Conclusion : le théorème de la distance assure que : $\frac{h(x) - h(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Démonstration avec le théorème de la moyenne.

Comme la fonction $\phi : t \rightarrow |f(t) - f(a)|$ est continue, on sait (thm de la moyenne)

$$\text{Il existe } c_h \in [a, a+h] \text{ tel que } \int_a^{a+h} |f(t) - f(a)| dt = \phi(c) [(a+h) - a] = \phi(c) \cdot h$$

de plus $a \leq c_h \leq a+h$ donc $c_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} a$ et $\phi(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \phi(a) = |f(a) - f(a)| = 0$ (continuité)

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : Comme } \left| \frac{h(x) - h(a)}{x - a} - f(a) \right| &= \left| \frac{h(a+h) - h(a)}{h} - f(a) \right| \leq \phi(c) \text{ et } \phi(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ \text{le théorème de la distance assure que : } &\frac{h(x) - h(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a). \end{aligned}$$

Démonstration avec des ε .

J'applique la définition de $f(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$ avec $\varepsilon > 0$ Ainsi au voisinage de a , on a $|f(t) - f(a)| \leq \varepsilon$,

CàD il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall t \in [a - \eta, a + \eta], |f(t) - f(a)| \leq \varepsilon$

J'intègre cette inégalité sur $[a, a+h] \subset [a - \eta, a + \eta]$, ainsi $\int_a^{a+h} |f(t) - f(a)| dt \leq \varepsilon h$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \left| \frac{h(a+h) - h(a)}{h} - f(a) \right| \leq \varepsilon$$

On a vérifié la définition de la limite donc le taux de variation de h en a tend vers $f(a)$ quand $x \rightarrow a$.

Donc h est dérivable en a et $h'(a) = f(a)$. fini.

4.2 Lien entre primitive et intégrale.

Théorème 10.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in [a, b]$

Alors la fonction f admet des primitives sur $[a, b]$.

De plus la fonction H_α définie par l'expression $H_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t) dt$
est l'**unique** primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en α

Rappel important : Dans la théorie de la dérivation, on a vu que

Si h_1 et h_2 sont deux primitives de f sur $[a, b]$

alors il existe une constante K telle que $h_2 = h_1 + K$.

Démonstration : la fonction h que l'on propose est d'après la section précédent dérivable sur $[a, b]$, $h' = f$ et $h(\alpha) = 0$ donc c'est une primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en α .

Conclusion : la fonction f admet des primitives sur $[a, b]$.

De plus si h_2 est une autre primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en α alors d'après le rappel, il existe une constante K telle que $h_2 = h + K$.
J'applique l'égalité en α ainsi $K = 0$ donc $h_2 = h$ on a bien unicité.

Théorème 11.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

Soit h une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

$$\text{Alors } \int_a^b f(t) dt = h(b) - h(a).$$

Démonstration : Soit $\alpha \in [a, b]$.

On sait que la fonction h définie par $h(x) = \int_\alpha^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$. On a

$$h(b) - h(a) = \int_\alpha^b f(t) dt - \int_\alpha^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

De plus si h_2 est une autre primitive de f sur $[a, b]$

alors il existe une constante K telle que $h_2 = h + K$

$$\text{on a bien } h_2(b) - h_2(a) = (h(b) + K) - (h(a) + K) = h(b) - h(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Théorème 12.

Soit f une fonction définie et \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Démonstration : On applique le théorème précédent avec f' à la place de f et f à la place de h .

5 Primitivation des DL.

Théorème 13.

Soit ϕ une fonction définie sur $I = [-M, M]$ ou $I = [0, M]$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{la fonction } \phi \text{ est continue sur } I \\ \text{La fonction } \phi \text{ est négligeable en } 0 \text{ devant } x^n \end{array} \right\} \implies \\ \implies \text{ la fonction } h(x) = \int_0^x \phi(t) dt \text{ est négligeable en } 0 \text{ devant } x^{n+1}$$

Démonstration : On va démontrer que : $Quotient = \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On suppose que $I = [0, M]$ ainsi $x > 0$ et $\phi \geq 0$ ainsi les Val. Abs. seront facilement simplifiables

$$\text{On a } |Quotient| = \left| \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^{n+1}} \right| \leq \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^{n+1}}$$

La fonction f est négligeable en 0 devant x^n , on sait que $\frac{\phi(x)}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, j'applique la définition avec $\varepsilon > 0$

$$\text{Ainsi il existe } \eta > 0 \text{ tel que : } \forall t \in [0, \eta], |\phi(t)/t^n| \leq \varepsilon \implies |\phi(t)| \leq \varepsilon t^n.$$

On intègre cette inégalité sur $[0, x] \subset [0, \eta]$ ainsi $\int_0^x \phi(t) dt \leq \int_0^x \varepsilon t^n dt = \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\text{Conclusion : Si } x \in [0, \eta], \text{ on a } |Quotient| = \left| \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^{n+1}} \right| \leq \frac{\int_0^x \phi(t) dt}{x^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$$

On a vérifié la définition de la limite donc $Quotient \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Fini

Théorème 14. Primitivation des DL

Soit f une fonction définie sur $I = [-M, M]$ ou $I = [0, M]$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } I \\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2) \\ \text{Soit } h \text{ une primitive de } f \end{array} \right\} \implies h(x) = h(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Démonstration : Par définition, on a que $o(x^2)$ est une fonction ϕ négligeable devant x^2 .

De plus comme $o(x^2) = \phi(x) = f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$, la fonction ϕ est continue.

En intégrant l'égalité $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \phi(t)$ sur $[0, x]$, on obtient bien $h(x) = h(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

6 Somme de Riemann

Définition 15.

Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$

La somme de Riemann *gauche* de f sur $[0, 1]$

l'aire de la fonction en escalier *gauche* associée à la subdivision $0 = 0/n, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1$

$$\text{Ainsi } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Théorème 16.

Convergence des sommes de Riemann.

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$

Alors les sommes de Riemann *gauche ou droite* tendent vers $\int_a^b f(t) dt$ quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration : On va démontrer la convergence des sommes de Riemann gauche de f à l'aide du théorème du module

$$\begin{aligned} |S_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \\ &\quad \text{Je découpe l'intégrale en cohérence avec la subdivision.} \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \right| \\ &\quad \text{Astuce } \frac{1}{n} f(k/n) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(k/n) dt \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(k/n) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} [f(k/n) dt - f(t)] dt \right| \\ &\quad \text{Inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt \\ &\quad \text{J'ajoute l'hypothèse : la fonction } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne.} \\ &\quad \text{je majore donc } \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \text{ par } M \left| \frac{k}{n} - t \right| \\ &\quad \text{De plus } t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \text{ donc } \left| \frac{k}{n} - t \right| \leq \frac{1}{n} \\ &\quad \text{Conclusion : sur } \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \text{ on a } \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \leq \frac{M}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{n} dt \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{M}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = n \frac{M}{n^2} = \frac{M}{n} \end{aligned}$$

Comme la majoration tend vers 0, le théorème du module conclut.

Les fonctions usuelles sont pour la plupart \mathcal{C}^1 donc lipschitzienne donc la démonstration est valide. Pour démontrer la convergence des sommes de Riemann sans l'hypothèse lipschitzien, on doit utiliser la notion d'uniforme continuité.

7 Taylor et applications.

7.1 Les formules de Taylor.

Théorème 17. Formules de Taylor avec reste intégrale

Soit f une fonction \mathcal{C}^{n+1} sur $[-M, M]$

Alors pour tout $x \in [-M, M]$, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n

et on utilise $(x-t)^n \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ Attention la variable d'intégration c'est t

Théorème 18. Inégalité de Taylor ou TTTAAFF

Soit f une fonction \mathcal{C}^{n+1} sur $[-M, M]$

Alors Pour tout $x \in [-M, M]$, on a

$$\left| f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \right] \right| \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Subtilité : Comme $x \in [-|x|, |x|]$, on peut remplacer M par $|x|$.

Démonstration : C'est assez clair sauf à la fin

$$\begin{aligned} |Gauche| &= \left| \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \\ &\quad \text{Inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_0^x |f^{(n+1)}(t)| \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt \\ &\quad \text{Majoration brutale} \\ &\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &\quad \text{Comme } t \in [0, x], \text{ on a } |x-t|^n \leq |x-0|^n \leq |x|^n \\ &\leq \int_0^x \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^n}{n!} dt \\ &\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^n}{n!} |x-0| \\ &\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^n}{n!} \cdot |x| = \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{n!} \end{aligned}$$

Pour obtenir le $(n+1)!$, il faut faire une majoration moins brutale en gardant $(x-t)^n$ puis distinguer les situations $x > 0$ et $x < 0$ pour simplifier les V.A. et enfin utiliser

$$(x-t)^n \overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \quad \text{Attention la variable d'intégration c'est } t$$

7.2 Application aux DL : Taylor-Young.

Théorème 19. Le théorème de Taylor-Young

Soit f une fonction \mathcal{C}^n sur $[-M, M]$

$$\text{Alors } f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Lorsque f est \mathcal{C}^{n+1} ou \mathcal{C}^∞ alors on peut remplacer $o(x^n)$ par $\mathcal{O}(x^{n+1})$

Démonstration : On doit montrer que $f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \right]$ est négligeable devant x^n ,

$$\text{CàD } \text{Quotient} = \frac{\text{petit}}{\text{gros}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

J'ajoute l'hypothèse que la fonction f est \mathcal{C}^{n+1}

Cette nouvelle hypothèse me permet d'utiliser l'inégalité de Taylor.

Je note $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ la norme infinie de $f^{(n+1)}$ sur $[-M, M]$. elle est bien finie car $f^{(n+1)}$ est \mathcal{C}^0 sur le segment $[-M, M]$.

$$\begin{aligned} |\text{Quotient}| &= \left| \frac{\text{petit}}{x^n} \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{|x|^n} \\ &\quad \text{On simplifie} \\ &\leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Comme $\|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|}{(n+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, le théorème du module assure que $\text{Quotient} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Remarque : Pour démontrer le théorème avec l'hypothèse "la fonction est \mathcal{C}^n ", il faut utiliser Taylor avec reste intégrale et le travailler de façon subtile.

7.3 Application aux séries Taylor.

Théorème 20.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge et

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$$

8 Annexes.

8.1 Annexe : L'uniforme continuité.

Définition 21.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$.

> On dit que f est continue sur $[a, b]$ Ssi

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Dans la définition, η dépend de x_0 et de ε mais ne dépend pas de x .

> On dit que f est continue uniformément continue sur $[a, b]$ Ssi

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, x', |x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Dans la définition, η mais ne dépend pas de x et x' .

Les définitions sont très proche. On a en effet

$$x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \iff |x - x_0| \leq \eta$$

Donc x_0 et x' joue le même rôle.

Les définitions diffèrent sur les positions des quantificateurs

"Pour tout x_0 " et "il existe η ".

Vocabulaire : En math le mot uniforme signifie "ne dépend pas de ..."

Théorème 22.

Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration : On suppose que f est k -lipschitzienne sur \mathcal{D} .

On va montrer que f vérifie la définition de l'uniforme continuité.

Pour tout $\varepsilon > 0$. Comme f est k -lipschitzienne, on a pour tout $x, x' \in \mathcal{D}$

$$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$$

Je choisis $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, ainsi on a que : Lorsque $|x - x'| \leq \eta = \frac{\varepsilon}{k}$

$$\text{Alors } |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'| \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Théorème 23.

Sur \mathbb{R}_+ , la fonction \sqrt{x} est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne

Démonstration : La fonction \sqrt{x} est uniformément continue ?

> Étape 1 : On montre tout d'abord l'inégalité :

$$\forall x, x' \geq 0, \left| \sqrt{x} - \sqrt{x'} \right| \leq \sqrt{|x - x'|}$$

On distingue les situations $x > x'$ et $x < x'$, on supprime les V.A. et on y va direct.

> Étape 2 : On reprend la démonstration précédente

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour tout $x, x' \geq 0$ $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|}$

Je choisis $\eta = \varepsilon^2 > 0$, ainsi on a que : Lorsque $|x - x'| \leq \eta = \varepsilon^2$

$$\text{Alors } |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|} \leq \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon.$$

La fonction \sqrt{X} n'est pas lipschitzienne ?

On fait un RA.

Je suppose que \sqrt{X} est k -lipschitzienne, CàD il existe ≥ 0 tel que :

$$\forall x, x' \geq 0, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq k|x - x'|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x - x'}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \right| \leq k|x - x'|$$

$$\Rightarrow 1 \leq k \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x'}) \quad \text{Lorsque } x \neq x'$$

J'applique cette inégalité avec $x' = 0$ et $x = \frac{1}{4k^2} > 0$,

$$\text{ainsi } 1 \leq k \sqrt{\frac{1}{4k^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{Oups!!}$$

Théorème 24.

Sur \mathbb{R} , la fonction X^2 n'est pas uniformément continue.

Démonstration : On fait un RA. Je suppose que \sqrt{X} est uniformément continue sur \mathbb{R} .

J'applique la définition de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1$,

$$\text{Ainsi il existe } \eta > 0 \text{ tel que : lorsque } |x - x'| \leq \eta \text{ alors } |x^2 - x'^2| \leq 1$$

je choisis $x = n + \frac{1}{n}$ et $x' = n$ avec $n \geq \frac{1}{\eta}$.

Avec ce choix, on a

$$|x - x'| = \frac{1}{n} \leq \eta \quad \text{et} \quad |x^2 - x'^2| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \quad \text{OUPS!}$$

Théorème 25. Le théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Démonstration : La démonstration est difficile et elle n'est pas exigible.

Elle ressemble à celle de continue sur un segment.

C'est un R.A. : On construit des suites, on utilise BW et enfin on passe à la limite les relations qui donnent l'absurdité

8.2 Densité des fonctions \mathcal{C}^1 , des fonctions en escalier

8.3 Constructions de l'intégrale.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$

Voici une démarche possible.

> Étape 1 : On démontre que les sommes de Riemann gauches convergent et on note $\int_a^b f(t) dt$ la limite.

C'est l'étape difficile car la suites des sommes de Riemann gauches, n'est pas monotone.

Il faut définir la notion de "les suites de Cauchy", justifier que de telles suites convergent et l'appliquer au somme de Riemann.

Ces constructions utilise la notion d'uniforme continuité et le théorème de Heine.

> Étape 2 : On justifie que les autres sommes de Riemann convergent vers la même limite

Ici encore on utilise la notion d'uniforme continuité et le théorème de Heine.

> Étape 3 : On justifie le formulaire, en regardant ce que devienne des égalités/inégalités à la limite quand $n \rightarrow \infty$.