

Intégrale de Poisson Via les sommes de Riemann

Sujet très détaillé. La question 2 est à médité

Exercice 1.Soit a un réel $\neq \pm 1$.On va calculer $I(a) = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt$ (l'intégrale de Poisson)Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une factorisation.

(a) Factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ (b) Passage de $\mathbb{C}[X]$ à $\mathbb{R}[X]$ Justifier que si : r est une racine de $X^{2n} - 1$ alors \bar{r} est aussi une racine de $X^{2n} - 1$.Expliciter les couples (r, \bar{r}) pour les racines de $X^{2n} - 1$.Développer $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ En réunissant les facteurs conjugués, factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (c) Montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) = \frac{(X^{2n} - 1)(X - 1)}{X + 1}$$

Si besoin : On pourra admettre cette égalité et faire la suite

2. Le nombre $I(a)$ se calcule. On rappelle que : $a \in \mathbb{R}$ et $\neq \pm 1$ (a) Justifier que : Le nombre $I(a)$ se calcule Ssi $\forall t \in [0, \pi], a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.On va démontrer $\forall t \in [0, \pi], a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.(b) Démonstration 1. Pour tout/chaque $t \in [0, \pi]$ Déterminer le minimum de la fonction $h : a \mapsto a^2 - 2a \cos(t) + 1$ Conclure que : $\forall t \in [0, \pi], a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.(c) Démonstration 2. Pour tout/chaque $a \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \pi]$ Factoriser le polynôme $a^2 - 2a \cos(t) + 1$.En déduire que $a^2 - 2a \cos(t) + 1 = |a - e^{it}|^2$.Justifier que $a - e^{it} \neq 0$.Conclure que : $\forall t \in [0, \pi], a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.

(d) Démonstration 3

Mettre le trinôme $a^2 - 2a \cos(t) + 1$ sous forme canonique.Conclure que : $\forall t \in [0, \pi], a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.3. On suppose que $|a| < 1$.(a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0, \pi]$ de la fonction $t \mapsto \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1)$ Puis simplifier S_n à l'aide de Q1c.(b) Déterminer un équivalent de S_n puis que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ En déduire que $I(a) = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt = 0$.4. On suppose que $|a| > 1$.(a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0, \pi]$ de la fonction $t \mapsto \ln(a^2 - 2a \cos t + 1)$ déjà fait(b) Justifier que : $I(a) = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt = 2\pi \ln |a|$.

Intégrale de Poisson Via une équation fonctionnelle

D'après une sujet de concours

Exercice 2. [Correction]

1. Soit g une fonction définie, continue sur \mathbb{R} , paire et 2π -périodique.

(a) Montrer que : $\int_{-\pi}^0 g(t) dt = \int_0^{\pi} g(t) dt$.

(b) Justifier que la fonction $h : x \mapsto \int_x^{x+2\pi} g(t) dt$ est définie, dérivable \mathbb{R} . Calculer et simplifier h' .

(c) Dédire des 2 questions précédentes que : $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 2 \int_0^{\pi} g(t) dt$.

2. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on considère

$$f_r(\theta) = r^2 - 2r \cos(\theta) + 1$$

Montrer que : $\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, \forall \theta \in \mathbb{R}, f_r(\theta) > 0$. la question est détaillée dans l'exercice 1

3. On pose pour $\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}$,

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos(\theta) + 1) d\theta$$

La question Q2 assure l'intégrale est bien définie, on l'admettra. Voir l'exercice 1

(a) À l'aide du changement de variable $u = \pi - \theta$, montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, I(-r) = I(r)$$

(b) En remarquant que $2I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, 2I(r) = \int_0^{\pi} \ln(r^4 - 2r^2 \cos(2\theta) + 1) d\theta$$

puis à l'aide d'un changement de variable et en utilisant la question Q1c. en déduire que :

$$\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, 2I(r) = I(r^2)$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, 2^n I(r) = I(r^{2^n})$

4. Calcul de $I(r)$ quand $|r| < 1$.

(a) Montrer que : Si $|a| < 1$ alors $|I_a| \leq 2\pi \ln(1 + |a|) \leq 2\pi \ln(2)$.

(b) En déduire que : Si $|r| < 1$, alors $I(r) = 0$.

5. Calcul de $I(r)$ quand $|r| > 1$.

(a) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}, I\left(\frac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi \ln(|r|)$

(b) En déduire que la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.