Intégrale de Poisson Via les sommes de Riemann

Sujet très détaillé. La question 2 est à méditer

Exercice 1. [Correction] Soit a un réel $\neq \pm 1$.

On va calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt$ (l'intégrale de Poisson)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une factorisation.
   (a) Factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
   (b) Passage de $\mathbb{C}[X]$ à $\mathbb{R}[X]$
   Justifier que si : r est une racine de $X^{2n} - 1$ alors $\overline{r}$ est aussi aune racine de $X^{2n} - 1$.
   Expliciter les couples $(r, \overline{r})$ pour les racines de $X^{2n} - 1$.
   Développer $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$
   En réunissant les facteurs conjugués, factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
   (c) Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{\left(X^{2n} - 1\right)(X - 1)}{X + 1}$
   Si besoin : On pourra admettre cette égalité et faire la suite

2. Le nombre $I(a)$ se calcule. *On rappelle que : $a \in \mathbb{R}$ et $\neq \pm 1$*
   (a) Justifier que : Le nombre $I(a)$ se calcule Ssi $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.
   $$\boxed{\text{On va démontrer } \forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0.}$$
   (b) Démonstration 1. Pour tout/chaque $t \in [0, \pi]$
   Déterminer le minimum de la fonction $h : a \longmapsto a^2 - 2a\cos(t) + 1$
   Conclure que : $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.
   (c) Démonstration 2. Pour tout/chaque $a \in$ .. et $t \in [0, \pi]$
   Factoriser le polynôme $a^2 - 2a\cos(t) + 1$.
   En déduire que $a^2 - 2a\cos(t) + 1 = \left|a - e^{it}\right|^2$.
   Justifier que $a - e^{it} \neq 0$.
   Conclure que : $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.
   (d) Démonstration 3
   Mettre le trinôme $a^2 - 2a\cos(t) + 1$ sous forme canonique.
   Conclure que : $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.

3. On suppose que $|a| < 1$.
   (a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0, \pi]$ de la fonction $t \longmapsto \ln\left(a^2 - 2a\cos(t) + 1\right)$
   Puis simplifier S_n à l'aide de Q1c.
   (b) Déterminer un équivalent de S_n puis que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   En déduire que $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = 0$.

4. On suppose que $|a| > 1$.
   (a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0, \pi]$ de la fonction $t \longmapsto \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)$ déjà fait
   (b) Justifier que : $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = 2\pi \ln|a|$.

Intégrale de Poisson Via une équation fonctionnelle

D'après une sujet de concours

Exercice 2. [Correction]

1. Soit g une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} g(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} g(t)\,dt.$
   (b) Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \displaystyle\int_{x}^{x+2\pi} g(t)\,dt$ est définie, dérivable $\mathbb{R}$. Calculer et simplifier h'.
   (c) Déduire des 2 questions précédentes que : $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} g(t)\,dt.$
2. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $r \neq \pm 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   On va montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ r^2 - 2r\cos(t) + 1 > 0.$

   (a) Démonstration 1. Pour tout/chaque $t \in [0, \pi]$
   Déterminer le minimum de la fonction $h : r \longmapsto r^2 - 2r\cos(t) + 1$
   Conclure que : $\forall\, t \in [0, \pi],\ r^2 - 2r\cos(t) + 1 > 0.$
   (b) Démonstration 2. Pour tout/chaque $r \in ..$ et $t \in [0, \pi]$
   Factoriser le polynôme $r^2 - 2r\cos(t) + 1$.
   En déduire que $r^2 - 2r\cos(t) + 1 = \left|r - e^{it}\right|^2$.
   Justifier que $r - e^{it} \neq 0$.
   Conclure que : $\forall\, t \in [0, \pi],\ r^2 - 2r\cos(t) + 1 > 0.$
   (c) Démonstration 3
   Mettre le trinôme $r^2 - 2r\cos(t) + 1$ sous forme canonique.
   Conclure que : $\forall\, t \in [0, \pi],\ r^2 - 2r\cos(t) + 1 > 0.$
3. On pose pour $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}$,
   $$I(r) = \int_{0}^{\pi} \ln(r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1)\,d\theta$$
   (a) Justifier que : Le nombre $I(r)$ se calcule Ssi $\forall\, t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0.$
   (b) À l'aide du changement de variable $u = \pi - \theta$, montrer que :
   $$\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ I(-r) = I(r)$$
   (c) En remarquant que $2\,I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que :
   $$\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ 2I(r) = \int_{0}^{\pi} \ln(r^4 - 2\,r^2\cos(2\theta) + 1)\,d\theta$$
   puis à l'aide d'un changement de variable et en utilisant la question Q1c. en déduire que :
   $$\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ 2I(r) = I(r^2)$$
   (d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ 2^n I(r) = I(r^{2^n})$
4. Calcul de $I(r)$ quand $|r| < 1$.
   (a) Montrer que : Si $|a| < 1$ alors $|I_a| \leqslant 2\,\pi\,\ln(1 + |a|) \leqslant 2\,\pi\,\ln(2)$.
   (b) En déduire que : Si $|r| < 1$, alors $I(r) = 0$.
5. Calcul de $I(r)$ quand $|r| > 1$.
   (a) Montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ I\left(\dfrac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi\ln(|r|)$
   (b) En déduire que la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Soit a un réel $\neq \pm 1$.

On va calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt$ (l'intégrale de Poisson)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une factorisation.

   (a) Factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

   Le polynôme est unitaire et de degré 2n. Ces racines sont les racines 2n-ième de l'unité

   $$\text{Conclusion : } X^{2n} - 1 = 1 \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \omega_k) \text{ avec } \omega_k = \exp\left(i\, k\, \frac{2\pi}{2n}\right) = \exp\left(i\, \frac{k\pi}{n}\right)$$

   (b) Passage de $\mathbb{C}[X]$ à $\mathbb{R}[X]$

   Justifier que si : r est une racine de $X^{2n} - 1$ alors $\overline{r}$ est aussi aune racine de $X^{2n} - 1$.

   On suppose que r est une racine de $X^{2n} - 1$, ainsi on a $r^{2n} - 1 = 0$

   On conjugue l'égalité ainsi $\overline{r^{2n} - 1} = \overline{0}$

   $$\iff \overline{r}^{2n} - 1 = 0$$

   Conclusion : $\overline{r}$ est bien une racine de $X^{2n} - 1$

   Expliciter les couples $(r, \overline{r})$ pour les racines de $X^{2n} - 1$.

   Les racines $\omega_0 = 1$ et $\omega_n = -1$ sont réelles.

   Sinon pour $k \in \{1, 2, ..., (n-1)\}$, on a $(\omega_k, \overline{\omega_k}) = (\omega_k, \omega_{2n-k})$

   Développer $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

   $$\begin{aligned} \text{On a } (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) &= X^2 - X\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] + e^{i\theta} e^{-i\theta} \\ &= X^2 - X\left[(C + iS) + (C - iS)\right] + e^0 \\ &= X^2 - 2\cos(\theta)\, X + 1 \end{aligned}$$

   En réunissant les facteurs conjugués, factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

   $$\begin{aligned} \text{On a } X^{2n} - 1 &= 1 \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \omega_k) \\ &= \underbrace{(X - 1)}_{k=0} \prod_{k=1}^{n-1} \left[(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k})\right] \underbrace{(X + 1)}_{k=n} \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left[X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) X + 1\right] \end{aligned}$$

   (c) Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{\left(X^{2n} - 1\right)(X - 1)}{X + 1}$

   $$\text{En ré-organisant, on a } \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{X^{2n} - 1}{(X-1)(X+1)}$$

   $$\begin{aligned} \text{Conclusion : } \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) &= \underbrace{(X^2 - 2X + 1)}_{k=0} \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \\ &= (X-1)^2 \frac{X^{2n} - 1}{(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{\left(X^{2n} - 1\right)(X - 1)}{X + 1} \end{aligned}$$

   Si besoin : On pourra admettre cette égalité et faire la suite

2. Le nombre $I(a)$ se calcule. *On rappelle que : $a \in \mathbb{R}$ et $\neq \pm 1$*

   (a) Justifier que : Le nombre $I(a)$ se calcule Ssi $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.

   I_a se calcule Ssi le fonction $t \longmapsto \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)$ est définie et continue sur $[0, \pi]$

   Conclusion : Le nombre $I(a)$ se calcule Ssi $\forall t \in [0, \pi],\ a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.

   car la fonction est fabriquée avec ....

$$\boxed{\text{On va démontrer } \forall t\in[0,\pi],\ a^2-2a\cos(t)+1>0.}$$

(b) Démonstration 1. Pour tout/chaque $t\in[0,\pi]$

Déterminer le minimum de la fonction $h : a \longmapsto a^2-2a\cos(t)+1$

La fonction h est dérivable et $\forall a,\ h'(a)=2a-2\cos(t)$

Le bô tableau de variation assure que le minimum est atteind quand $a=\cos(t)$

Conclusion : $\forall a,\ h(a)\geqslant h(\cos t)=1-\cos^2 t=\sin^2 t$

Conclure que : $\forall t\in[0,\pi],\ a^2-2a\cos(t)+1>0.$

Comme $a\neq\pm1$ donc $\cos(t)=a\neq\pm1$ et $\sin t\neq 0$

Conclusion : $a^2-2a\cos(t)+1=h(a)\geqslant h(\cos t)=1-\cos^2 t=\sin^2 t>0$

(c) Démonstration 2. Pour tout/chaque $a\in ..$ et $t\in[0,\pi]$

Factoriser le polynôme $a^2-2a\cos(t)+1$. En déduire que $a^2-2a\cos(t)+1=\left|a-e^{it}\right|^2$.

Avec le discriminant, on trouve les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

$$\begin{aligned}\text{Conclusion : } a^2-2a\cos(t)+1&=(a-e^{i\theta})(a-e^{-i\theta})\\ &=(a-e^{i\theta})\overline{(a-e^{i\theta})}\\ &=\square\overline{\square}\\ &=\square^2|=\left|a-e^{it}\right|^2\end{aligned}$$

Justifier que $a-e^{it}\neq 0$.

Comme $a\in\mathbb{R}$ et $\neq\pm1$, on a $|a|\neq 1$

Conclusion : $a\neq e^{it}$

Conclure que : $\forall t\in[0,\pi],\ a^2-2a\cos(t)+1>0.$

Comme $a-e^{it}\neq 0$, on a $\left|a-e^{it}\right|^2>0$

(d) Démonstration 3

Mettre le trinôme $a^2-2a\cos(t)+1$ sous forme canonique.

On a $a^2-2a\cos(t)+1=(a-\cos(t))^2+\sin^2(t)$

Conclure que : $\forall t\in[0,\pi],\ a^2-2a\cos(t)+1>0.$

On a : $(a-\cos(t))^2+\sin^2(t)\geqslant 0$

De plus $(a-\cos(t))^2+\sin^2(t)=0$

$$\begin{aligned}&\iff a-\cos(t)=0 \ et\ \sin(t)=0\\ &\iff \sin(t)=0 \ et\ a=\cos(t)=\pm1\ OUPS\end{aligned}$$

Conclusion : $a^2-2a\cos(t)+1=(a-\cos(t))^2+\sin^2(t)>0$

3. On suppose que $|a|<1$.

(a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0,\pi]$ de la fonction $t\longmapsto \ln\left(a^2-2a\cos(t)+1\right)$
Puis simplifier S_n à l'aide de Q1c.

$$\begin{aligned}\text{On a } S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)&=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\\ &=\frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right]\\ &=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\left(a^{2n}-1\right)(a-1)}{a+1}\right]\end{aligned}$$

(b) Déterminer un équivalent de S_n puis que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Comme $|a|<1$, *on a* $a^{2n}-1<0,\ a-1<0$ *et* $a+1>0$.

$$\text{On a } S_n=\underbrace{\frac{\pi}{n}\ln(1-a^{2n})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}+\underbrace{\frac{\pi}{n}\ln(1-a)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}-\underbrace{\frac{\pi}{n}\ln(1+a)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

En déduire que $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(a^2-2a\cos t+1\right)\,dt=0.$

Comme la fonction est continue, on sait que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt$

Par unicité de la limite, on a bien, lorsque $|a| < 1$, $I(a) = \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt = 0$

4. On suppose que $|a| > 1$.

   (a) Écrire S_n la somme de Riemann gauche sur $[0, \pi]$ de la fonction $t \longmapsto \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)$

   On a
   $$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\left(a^{2n} - 1\right)(a-1)}{a+1}\right] \end{aligned}$$

   (b) Justifier que : $I(a) = \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt = 2\pi\ln|a|$.

   On suppose $a > 1$, ainsi on a : $a^{2n} - 1 > 0$, $a - 1 > 0$ et $a + 1 > 0$.

   On a
   $$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} - 1) + \frac{\pi}{n}\ln(a-1) - \frac{\pi}{n}\ln(a+1) \\ &= \frac{\pi}{n}\left[\ln(a^{2n}) + \ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)\right] + o(1) + o(1) \\ &= \frac{\pi}{n}\left[2n\ln(a) + o(1)\right] + o(1) + o(1) \\ &= 2\pi\ \ln a + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\ \ln a \end{aligned}$$

   De plus comme la fonction est continue, on sait que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt$

   Par unicité de la limite, on a bien, lorsque $a > 1$, $I(a) = \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right)\, dt = 2\pi\ \ln a$

   On fait le même calcul avec $a < -1$. On a alors $a^{2n} - 1 > 0$, $a - 1 < 0$ et $a + 1 < 0$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Soit g une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.

   (a) Montrer que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} g(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} g(t)\,dt.$

   On fait le changement de variable $u = -t$.

   (b) Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \displaystyle\int_{x}^{x+2\pi} g(t)\,dt$ est définie, dérivable $\mathbb{R}$. Calculer et simplifier h'.

   On peut calculer $h(x)$ Ssi la fonction g est continue sur $[x, x+2\pi]$
   Ssi $[x, x+2\pi] \subset \mathbb{R}$
   Ssi $x \in \mathbb{R}$ Ainsi la fonction h est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

   Comme g est continue, la théorie de l'intégration assure h est dérivable sur $\mathscr{D}$ et on a

$$h'(x) = \left[\int_{x}^{x+2\pi} g(t)\,dt\right]' = \left[\int_{0}^{x+2\pi} g(t)\,dt - \int_{0}^{x} g(t)\,dt\right]' = g(x+2\pi) - g(x) = 0 \text{ car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

   La fonction h est donc constante.

   (c) Déduire des 2 questions précédentes que : $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} g(t)\,dt.$

   On a

$$\int_{0}^{2\pi} g(t)\,dt = h(0) = h(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \int_{-\pi}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} g(t)\,dt$$

2. On a $f_r(\theta) =$ signe du trinôme en r.

3. On pose pour $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1,1\}$, $I(r) = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \ln(r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1)\,d\theta$

   (a) À l'aide du changement de variable $u = \pi - \theta$, montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1,1\},\ I(-r) = I(r)$

   On a $I(-r) =$ *on fait le changement de variable* $= I(r)$

   (b) En remarquant que $2\,I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1,1\},\ 2I(r) = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \ln(r^4 - 2\,r^2\cos(2\theta) + 1)\,d\theta$ puis à l'aide d'un changement de variable et en utilisant la question Q1c. en déduire que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1,1\},\ 2I(r) = I(r^2)$

$$\begin{aligned}
2\,I(r) &= I(r) + I(-r)\\
&= \int_{0}^{\pi} \ln(r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} \ln(r^2 + 2\,r\cos(\theta) + 1)\,d\theta\\
&= \int_{0}^{\pi} \ln\left[(r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1)(r^2 + 2\,r\cos(\theta) + 1)\right]\,d\theta\\
&= \int_{0}^{\pi} \ln\left[(r^4 + 2r^2\underbrace{(1 - 2\cos^2(\theta))}_{=-\cos(2\theta)} + 1)\right]\,d\theta
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $\alpha = 2\theta$

$$= \int_{0}^{2\pi} \ln\left[(r^4 - 2r^2\cos(\alpha) + 1)\right]\,\frac{d\alpha}{2}$$

On utilise la question Q1c. car f_r est 2π-périodique et paire

$$= 2\int_{0}^{\pi} \ln\left[(r^4 - 2r^2\cos(\alpha) + 1)\right]\,\frac{d\alpha}{2} = I(r^2)$$

   (c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1,1\},\ 2^n I(r) = I(r^{2^n})$

   On fait une récurrence.

4. Calcul de $I(r)$ quand $|r| < 1$.

   (a) Montrer que : Si $|a| < 1$ alors $|I_a| \leqslant 2\,\pi\,\ln(1 + |a|) \leqslant 2\,\pi\,\ln(2)$.

Pour tout a avec $|a| < 1$. On majore brutalement/Wikking l'intégrale

$$\begin{aligned}
|I(a)| &= \left| \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2\,a\cos(\theta) + 1)\, d\theta \right| \\
&\leqslant \int_0^{\pi} \left| \ln(a^2 - 2\,a\cos(\theta) + 1) \right| \, d\theta \\
&\leqslant \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2\,a\cos(\theta) + 1)\, d\theta \\
&\leqslant \int_0^{\pi} \ln(a^2 + 2\,a + 1)\, d\theta = \ln(a+1)^2\,(\pi) \leqslant 2\pi\, ln(1+1) = 2\pi\, ln(2)
\end{aligned}$$

(b) En déduire que : Si $|r| < 1$, alors $I(r) = 0$.

On a $|I(r)| = \left| \dfrac{I(r^n)}{2^n} \right| \leqslant \dfrac{2\pi\, ln(2)}{2^n}$

On regarde ce que devient la relation quand n tend vers $+\infty$

ainsi $|I(r)| \leqslant 0$ donc $I(r) = 0$.

5. Calcul de $I(r)$ quand $|r| > 1$.

Montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{R}/\{-1, 1\},\ I\left(\dfrac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi \ln(|r|)$

On a

$$\begin{aligned}
I\left(\frac{1}{r}\right) &= \int_0^{\pi} \ln(\frac{r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1}{r^2})\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\ln(r^2 - 2\,r\cos(\theta) + 1) - \ln(r^2) \right] \, d\theta = I(r) - \pi\, \ln(r^2)
\end{aligned}$$

En déduire que la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.

Lorsque $|r| > 1$ alors $\left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$ et $I\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$, donc

$$I(r) = \pi\, \ln(r^2) = 2\pi\, \ln(|r|)$$