Produit Scalaire.

1 Un air de première.

1.1 Définition.

Définition 1.

Soit le plan classique $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé $\left(\mathcal{O} : \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs.

il y a 2 façons de *calculer* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Définition avec distance et angle

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \stackrel{def}{=} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

Définition avec les coordonnées.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} x x' + y y'$$

Théorème 2. Propriétés du produit scalaire.

> Comme son "nom" l'indique

Le produit scalaire de deux vecteur est un nombre **réel**.

Le produit scalaire est un produit donc il se distribue.

> Les deux définitions sont équivalentes même si cela ne saute pas au yeux, et par conséquent elles fournissent au même résultat.

> Norme/produit scalaire. On a $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$ au lycée on note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

> Orthogonalité. On a $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

> Unicité

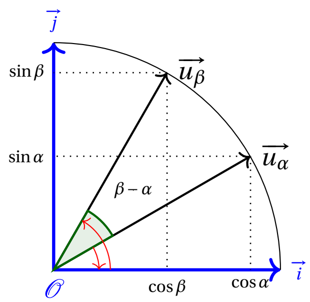
Au lycée, on parle du (article défini) produit scalaire, car on utilise en un produit scalaire très particulier celui associée à la géométrie classique du plan ou de l'espace.

On va voir qu'en fait il y a plusieurs produits scalaires.

les notations classiques sont : $\langle \odot, \odot \rangle$ ou $\langle \odot | \odot \rangle$ ou $(\odot, \odot)$ ou $\langle\langle \odot, \odot \rangle\rangle$ ou .....

1.2 Exercices de type lycée.

Exercice 1. Démonstration d'une formule trigo On considère les vecteurs $\overrightarrow{u_\alpha} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\overrightarrow{u_\beta} = \left(\cos\beta, \sin\beta\right)$

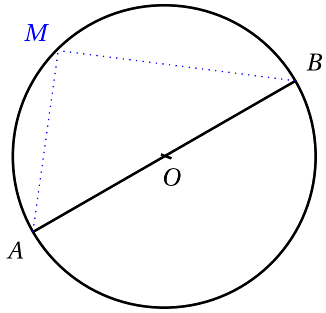


D'une part, on a
$\langle\overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{u_\beta}\rangle =$ avec les coordonnées $=$

D'autre part, on a
$\langle\overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{u_\beta}\rangle =$ avec Norme/Angle $=$

Conclusion :

Exercice 2. Une propriété "classique du cercle.
Soit le cercle de centre O et de diamètre $[A, B]$ et de rayon R et M un point du cercle

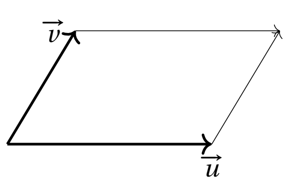


En remarquant que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$, montrer que
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = R^2$.

Conclusion : Le cercle de diamètre $[AB]$ c'est l'ensemble des points du plan qui "voit" la segment $[AB]$ sous un angle droit

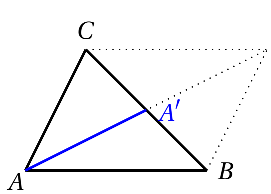
Exercice 3. La formule du parallélogramme.

1. Montrer que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2\right)$
2. Interprétation géométriquement.



Placer sur dessin les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ et interpréter.

3. Application. **La formule de la médiane.** On considère un triangle ABC et on note A' le milieu du segment $[BC]$

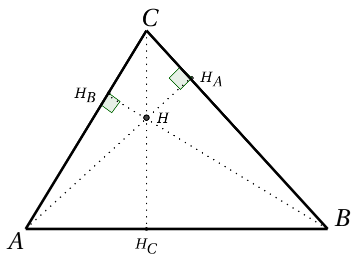


Démontrer que :

$$\left\|AA'\right\|^2 = \frac{1}{2}\|AB\|^2 + \frac{1}{2}\|AC\|^2 - \frac{1}{4}\|BC\|^2$$

Kulture : la droite (AA') c'est la médiane du triangle ABC issue de A.

Exercice 4. Intersection des hauteurs d'un triangle.



On considère un triangle ABC.
Soit H l'intersection des hauteurs issue de A et de B on a donc

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

et $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

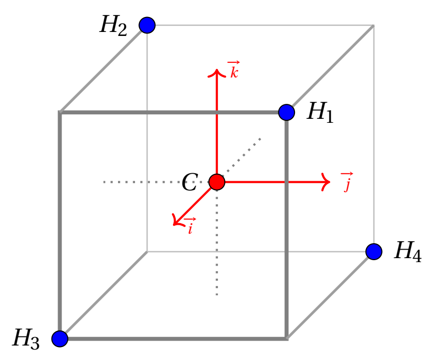
Démontrer que : $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, CàD $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ ainsi H est aussi sur la hauteur issu de C

Exercice 5. La molécule CH_4 et l'angle $109°28'$

On sait que spatialement la molécule CH_4 c'est 4 atomes d'hydrogène disposé au sommet d'un tétraèdre régulier et au centre un atome de carbone.
On considère le cube de sommet $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ et de centre $(0,0,0)$

1. On considère $H_1 = (1,1,1)$, $H_2 = (-1,-1,1)$, $H_3 = (1,-1,-1)$ et $H_4 = (-1,1,-1)$.

   Montrer que $H_1 H_2, H_3, H_4$ est un tétraèdre régulier et que C est son centre
2. On note θ l'angle $\left(\overrightarrow{CH_1}, \overrightarrow{CH_2}\right)$. Montrer que : $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 109°28'$



2 Produit scalaire et sa norme associée.

2.1 Définition.

Définition 3.
On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $(\vec{u} \mid \vec{v})$ ou $\vec{u}.\vec{v}$, sur $\mathbb{E}$ est une fonction de $\mathscr{D} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec les propriétés suivantes.

> **Scalaire.** $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est un nombre.
> **Bilinéaire CàD Produit.** $\forall$ *vecteurs*, $\forall$ *scalaires*

$$\begin{cases} (\alpha\, \vec{u_1} + \beta\, \vec{u_2}).\vec{v} = \alpha\, (\vec{u_1}.\vec{v}) + \beta\, (\vec{u_2}, \vec{v}) \\ \vec{u}.(\lambda\, \vec{v_1} + \mu\, \vec{v_1}) = \lambda\, (\vec{u}.\vec{v_1}) + \beta\, (\vec{u}, \vec{v_2}) \end{cases}$$

> **Symétrie.** $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

> **Positif.** $\forall \vec{u} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$

> **Définie.** $\forall \vec{u} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Remarque : Comme $\langle \odot, \odot \rangle$ est un produit, CàD bilinéaire, on a : $\forall \vec{u} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$.

Vocabulaire :
*Un espace **pré-hilbertien** réel est $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
*Un espace **euclidien** est un espace pré-hilbertien réel de dimension finie.*

Un petit raccourci.

```
Lorsque
    - ⟨⊙,⊙⟩ est linéaire par rapport à la première position
    - Et ⟨⊙,⊙⟩ est aussi symétrique
                  Alors ⟨⊙,⊙⟩ est linéaire par rapport à la deuxième position.
```

Théorème 4. Les produits scalaires classiques et Kulture

> Le produit scalaire classique du lycée, c'est

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x\,x' + y\,y' = (x\ y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{U}^T.\vec{V}$$

Remarque : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x\,x' + x\,y' + y\,x' + 4y\,y'$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

> L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k.v_k = \vec{U}^T.\vec{V}$

> L'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire classique $\langle A, B \rangle = tr(A^T.B)$

> L'espace $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire classique $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t).g(t)\,dt$

2.2 Norme.

Définition 5. Norme et distance

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

> On définit la norme, notée $\|\cdot\|$, sur $\mathbb{E}$ associée au produit scalaire $\langle \odot, \odot \rangle$, par

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{E}, \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$$

> On définit la distance entre 2 vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\mathbb{E}$ par

$$d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|.$$

Complément : Dans un espace affine, la distance entre 2 points A, B est $d(A,B) \overset{def}{=} d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = ||\overrightarrow{AB}||$.

Théorème 6. Propriétés de la Normes

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée.

Alors la norme vérifie les propriétés

> $\forall \overrightarrow{u}, \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$ est un réel positif et

$$\forall \overrightarrow{u}, \quad \|\overrightarrow{u}\| = 0 \implies \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

Remarque : A cause de la bilinéarité $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{0} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$, ainsi $||\overrightarrow{0}|| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{0} \right\rangle} = 0$.

> $\forall \lambda, \overrightarrow{u}, \quad \|\lambda \overrightarrow{u}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\|$

> Et **l'inégalité triangulaire,** $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{E}^2, \quad \|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{u}\|$

`Application :` $\|2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\| \leqslant 2\|\overrightarrow{u}\| + 3\|\overrightarrow{u}\|$.

Démonstration : Tous le formulaire se démontre en écrivant $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$ et en utilisant le formulaire de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La seule propriété délicate c'est l'inégalité triangulaire qui se démontre en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (qui est démontré un peu plus loin dans le cours), en effet on a

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2 &\leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ &\leqslant \left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)^2 \end{aligned}$$

Comme la norme est un nombre positif, on en déduit l'inégalité.

Théorème 7. Identités remarquables

Par définition, on sait que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$

Le produit scalaire est un "produit commutatif", ainsi on retrouve

> Le célèbre $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

> Ainsi que $a^2 - b^2 = (\underbrace{a+b}_{u}).(\underbrace{a-b}_{v})$

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a^2 - b^2 = \left\| \frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}}{2} \right\|^2$$

Démonstration : On utilise la distributivité du produit et la symétrie pour calculer

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \text{ et } (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$$

2.3 Cauchy-Schwartz.

Théorème 8. L'inégalité de Cauchy-Schwartz

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

On a $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}$
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle . \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leqslant \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle . \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2$$

De plus on a égalité Ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration : On va étudier la fonction f définie par $f(x) = (\vec{u} + x\vec{v}).(\vec{u} + x\vec{v})$

> D'une part.
$$f(x) = (\vec{u} + x\vec{v}).(\vec{u} + x\vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2x \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + x^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

Donc $f(x)$ est un trinôme!!!!

> D'autre part
$$f(x) = (\vec{u} + x\vec{v}).(\vec{u} + x\vec{v}) = \vec{\square}.\vec{\square} = \left\|\vec{\square}\right\| \geqslant 0$$

Conclusion : f est un trinôme qui est toujours $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

donc forcément $\Delta = b^2 - 4ac = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle . \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leqslant 0$

Démonstration du "De plus"

$$\begin{aligned}
\text{On a égalité } &\Longrightarrow \Delta = 0 \\
&\Longrightarrow \exists x_0 \textit{ tel que } f(x_0) = 0 \\
&\quad \textit{Or } f(x_0) = (\vec{u} + x_0\vec{v}).(\vec{u} + x_0\vec{v}) \\
&\quad \textit{ET } \left\langle \vec{\square}, \vec{\square} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \vec{\square} = \vec{0} \\
&\textit{Donc } \vec{u} + x_0\vec{v} = \vec{0} \textit{ et donc } \vec{u} = -x_0\vec{v}
\end{aligned}$$

Enfin Si $\vec{u} = a\vec{v}$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{On a bien } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle . \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

3 Orthogonalité, BON.

3.1 Orthogonalité

Définition 9. Orthogonale

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée.

> On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux Ssi : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

> On dit que le vecteur $\vec{u}$ et F sont orthogonaux Ssi : $\forall \vec{f} \in F, \left\langle \vec{u}, \vec{f} \right\rangle = 0$.

> On dit que le vecteur F et G sont orthogonaux : Ssi $\forall \left(\vec{f}, \vec{g}\right) \in F \times G, \left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle = 0$.

Exemple d'un plan dans l'espace

Soit $\mathscr{P}$ le plan (vectoriel) d'équation $2x - 3y + 5z = 0$.

Alors le vecteur $\vec{\Omega} = \left(2; -3; 5\right)$ est orthogonal à $\mathscr{P}$

Exemple matrices symétriques Vs matrices anti-symétriques

Soit F l'ensemble des matrices symétriques et G l'ensemble des matrices anti-symétriques

Alors F et G sont orthogonaux (pour le produit scalaire classique $\langle M, M \rangle = tr\left(M^T N\right)$)

Définition 10. Famille orthogonale

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée.
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \ldots$ des vecteurs.

On dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est orthogonale

Ssi les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux, , CàD

$$\forall\, i, j \in \{1, 2, .., n\},\ i \neq j \implies \langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j} \rangle = 0$$

Théorème 11. Propriétés des familles orthogonales

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée.
Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_n})$ une famille **orthogonale**.

On a

> $||\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}||^2 = ||\overrightarrow{u_1}||^2 + ||\overrightarrow{u_2}||^2 + \ldots + ||\overrightarrow{u_n}||^2$ Thm de Pythagore

> $(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_n})$ est libre. Sauf situation exceptionnelle CàD la famille ne contient le vecteur nul.

Démonstration : Démonstration de Pythagore.

On suppose que $(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_n})$ est une famille orthogonale.
On va calculer $||\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}||^2$

$$||\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}||^2 = (\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}).(\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n})$$

On utlise la linéarité du produit scalaire

$$= (\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}).\overrightarrow{\square} \qquad avec \overrightarrow{\square} = \overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}$$

$$= \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{\square} + \ldots + \overrightarrow{u_n}.\overrightarrow{\square}$$

De plus la famille est orthogonale donc

$$\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{\square} = \overrightarrow{u_i}.(\overrightarrow{u_1} + \ldots + \overrightarrow{u_n}) = \ldots = \overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_i} = ||\overrightarrow{u_i}||^2$$

$$= ||\overrightarrow{u_1}||^2 + \ldots. + ||\overrightarrow{u_n}||^2$$

Démonstration : Démonstration de libre.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_n})$ est une famille orthogonale et elle ne contient le vecteur nul.
On suppose que $a_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + a_n \overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } a_1 = .. = a_n = 0}$$

On calcule $\langle \overrightarrow{u_i}, (a_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + a_n \overrightarrow{u_n}) \rangle$ de 2 façons.

> D'une part. $\langle \overrightarrow{u_i}, (a_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + a_n \overrightarrow{u_n}) \rangle = \left\langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{0} \right\rangle = 0$

> D'autre part. $\langle \overrightarrow{u_i}, (a_1 \overrightarrow{u_1} + \ldots + a_n \overrightarrow{u_n}) \rangle = a_1 \langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_1} \rangle + \ldots + a_n \langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_n} \rangle = 0 + .. + a_i\, ||\overrightarrow{u_i}||^2 + \ldots + 0$

Donc $a_i\, ||\overrightarrow{u_i}||^2 = 0$

Comme $\overrightarrow{u_i} \neq \overrightarrow{0}$, on a $||\overrightarrow{u_i}||^2 \neq 0$, on a $a_i = 0$.

3.2 BON.

Définition 12. Base orthonormées

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée.
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... des vecteurs.

> **Unitaire.** On dit que $\vec{u}$ est unitaire ou normé Ssi $||\vec{u}|| = 1$

Remarque : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ est un vecteur unitaire. On dit que l'on a normé le vecteur $\vec{u}$.

> **Famille orthonormale**. On dit que la famille $(\vec{u_1}, \ldots \vec{u_n})$ est orthogonale
Ssi les vecteurs sont unitaires et 2 à 2 orthogonaux, CàD

$$\forall\, i, j \in \{1, 2, .., n\}, \quad \left\langle \vec{u_i}, \vec{u_j} \right\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} = 1 & Si\ j = i \\ = 0 & Si\ j \neq i \end{cases}$$

> **BON** Une $\mathscr{B} = \left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}, \ldots\right)$ est une BON
Ssi C'est une base et c'est une famille orthonormale, ainsi

$$\begin{cases} \forall\ p,\ ||\vec{\varepsilon_p}|| = 1 \\ et \\ \forall\ p \neq q,\ \left\langle \vec{\varepsilon_p}, \vec{\varepsilon_q} \right\rangle = 0 \end{cases}$$

Théorème 13. Propriétés des BON

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
Soit $\mathscr{B}_{on} = \left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}\right)$ une BON.
Soit $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux vecteurs avec leurs coordonnées dans $\mathscr{B}_{on}$

On a alors

> $u_i = \left\langle \vec{u}, \vec{\varepsilon_i} \right\rangle$

> $\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

> $||\vec{u}||^2 = \left\langle \vec{u}, \vec{u} \right\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

Démonstration : On va démontrer $x_i = \langle \vec{u}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle$
Je calcule $\langle \vec{u}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle$

$$\langle \vec{u}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle = \langle \left(x_1\, \vec{\varepsilon_1} + x_2\, \vec{\varepsilon_2} + \ldots + x_n\, \vec{\varepsilon_n}\right)\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle$$
$$= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k\, \vec{\varepsilon_k}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \right\rangle$$

On distribue

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle\, \vec{\varepsilon_k}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle$$

Comme $\left(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}\right)$ est une BON,
il ne reste que le plateau $k = i$

$$= x_i \langle\, \vec{\varepsilon_i}\ ,\ \vec{\varepsilon_i} \rangle = x_i \left\|\vec{\varepsilon_i}\right\|^2 = x_i$$

Fini □

Démonstration : Démonstration des formules

On calcule $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= \langle \left(x_1\, \overrightarrow{\varepsilon_1} + x_2\, \overrightarrow{\varepsilon_2} + \ldots + x_n\, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)\ ,\ \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{\varepsilon_k}\ ,\ \overrightarrow{v} \right\rangle \\
&\text{On distribue} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle\, \overrightarrow{\varepsilon_k}\ ,\ \overrightarrow{v} \rangle \\
&\text{Comme } \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right) \text{ est une BON,} \\
&\text{On a avec le théorème précédent } \langle\, \overrightarrow{\varepsilon_k}\ ,\ \overrightarrow{v} \rangle = y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k
\end{aligned}$$

Pour la norme, on applique $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$

Fini □

3.3 L'algorithme de Gram-Schmidt.

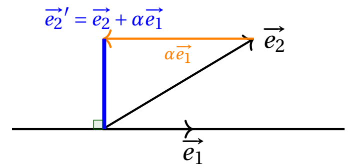
On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\right)$ une base de $\mathbb{E}$.

Cette base n'a aucune raison d'être orthogonale ou orthonormée

Étape 0. On garde $\overrightarrow{e_1}$.

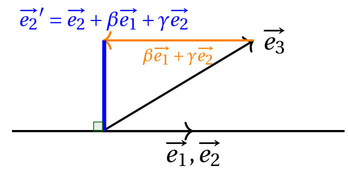
Étape 1. On modifie $\overrightarrow{e_2}$ afin qu'il devienne $\perp$ à $\overrightarrow{e_1}$

CàD on fabrique $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_2} + \alpha\overrightarrow{e_1}$ tel que $\overrightarrow{e_2}' \perp \overrightarrow{e_1}$.



Étape 2. On modifie $\overrightarrow{e_3}$ afin qu'il devienne $\perp$ à $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$

CàD on fabrique $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{e_3} + \beta\overrightarrow{e_1} + \gamma\overrightarrow{e_2}$
tel que $\overrightarrow{e_3}' \perp \overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_3}' \perp \overrightarrow{e_2}$.



Étape 3. On modifie $\overrightarrow{e_4}$ afin qu'il devienne $\perp$ ....

À la fin, on fabriqué une famille $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}', ..., \overrightarrow{e_n}'\right)$ orthogonale.

Cette famille est une base et on a en plus $vect\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right) = vect\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}'\right)$ et $vect\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) = vect\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}'\right)$ et ....

> Enfin en normant les vecteurs de $\mathscr{B}'$,
>
> on obtient une BON $\mathscr{B}_{on} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n})$ de $\mathbb{E}$.
>
> avec $\forall p \in \{1, 2, .., n\}$, $vect(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p}) = vect(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_p})$

Conséquence : Les BON existent!!! mais on s'en doutait.

3.4 Aspect théorique de Gram-Schmidt

Théorème 14. Orthonormalisation de Gram-Schmidt *Version théorique*

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle\odot,\odot\rangle$ un produit scalaire sur E .

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\right)$ une base de E.

Alors il existe une unique BON $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$

avec la matrice de passage $P = \mathscr{M}at(\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}')$ est triangulaire sup dont la diag est > 0.

4 L'orthogonal d'un ssev.

Définition 15. L'orthogonal

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
Soit $A \subset E$.

L'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$,
c'est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont orthogonaux à **TOUS** les vecteurs A.

$$\text{Ainsi } \vec{u} \in A^{\perp} \iff \forall \vec{a} \in A,\ \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$$

`Remarque : La définition ne suppose aucune propriété sur la partie` A,
`le plus souvent` A `sera un ssev de` $\mathbb{E}$.

Théorème 16. Propriétés de l'orthogonal

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire.

> **Contravariant**. Soit $A, B \subset \mathscr{P}(\mathbb{E})$. On a : $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

> **Ssev.** Soit $A \subset \mathscr{P}(\mathbb{E})$. Alors $A^{\perp}$ est un ssev de $\mathbb{E}$.

> **Kulture.** $\vec{0}^{\perp} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{E}^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

> **Famille orthogonale.** Lorsque la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est orthogonale
Alors $\overrightarrow{u_p}$ est orthogonal à $vect(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$

> **Dimension finie.** Soit F un ssev de *dimension fini.*
Alors $F^{\perp}$ est **le** ssev supplémentaire orthogonale de F

$$F \oplus F^{\perp} = E \quad \text{et} \quad \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F \quad \text{et} \quad (F^{\perp})^{\perp} = F$$

> **Orthogonale et Bon.** On suppose que $F \oplus F^{\perp} = E$
On a alors $\mathscr{B}on_F \cup \mathscr{B}on_{H^{\perp}} = \mathscr{B}on_{\mathbb{E}}$.

> **Bon incomplète.** On suppose que $\dim(E) < \infty$.
Toute famille orthonormée se complète en une BON et $F^{\perp} = vect(Complément)$

Démonstration : Démonstration de $\left(\vec{0}\right)^{\perp} = \mathbb{E}$. On fait $\subset$ et $\supset$

$\boxed{\subset ?}$ Par définition, $\left(\vec{0}\right)^{\perp}$ est un ensemble de vecteur de $\mathbb{E}$ avec une propriété donc $\left(\vec{0}\right)^{\perp} \subset \mathbb{E}$.

$\boxed{\supset ?}$ Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{E}$,

$$\boxed{\text{On va montrer que } \vec{u} \in \left(\vec{0}\right)^{\perp}}$$

On sait $\left\langle \vec{u}, \vec{0} \right\rangle = 0$ donc on a bien $\vec{u} \in \left(\vec{0}\right)^{\perp}$

Démonstration : Démonstration de $\mathbb{E}^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$. On fait $\subset$ et $\supset$

$\boxed{\supset ?}$ Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{E}$, on sait $\left\langle \vec{u}, \vec{0} \right\rangle = 0$ donc on a bien $\forall \vec{u},\ \vec{u} \perp \vec{0}$. Donc $\vec{0} \in \mathbb{E}^{\perp}$

$\boxed{\subset ?}$ Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{E}^{\perp}$,

$$\boxed{\text{On va montrer que } \vec{u} = \vec{0}.}$$

Comme $\vec{u} \in \mathbb{E}^{\perp}$, donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs donc à lui même.
On a donc $0 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \implies \vec{u} = \vec{0}$

Démonstration : Les démonstration des 2 autres propriétés sont faciles (cependant pour démontrer que $F \cap F^{\perp} \subset \left\{\vec{0}\right\}$, on doit utiliser que Si $\vec{u} \in F \cap F^{\perp}$ alors $\vec{u}$ est orthogonale à lui même.)

5 Projection orthogonale- Distance.

5.1 Définitions.

Définition 17.

On considère $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire.

Soit F un ssev avec $\dim F < +\infty$.

> On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
Souvent on la notera p_F.

> On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$. Souvent on la notera s_F.

Théorème 18. Liens entre p_F, $p_{F^\perp}$ et s_F

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Soit F un ssev avec $\dim F < +\infty$.

On a alors

$$p_F + p_{F^\perp} = id_{\mathbb{E}} \quad \text{et} \quad s_F = 2\,p_F - id_{\mathbb{E}}$$

Théorème 19. Expression du projeté orthogonal

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Soit un ssev F de E et on suppose que $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_p}\right)$ est une BON de F.

Soit la fonction p_F la projection orthogonale sur F.

On a

$$\forall\, \overrightarrow{u} \in E,\ p_F\left(\overrightarrow{u}\right) = \left\langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{\varepsilon_1} + \left\langle \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{\varepsilon_2} + ... + \left\langle \overrightarrow{\varepsilon_p}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{\varepsilon_p}$$

Application avec $p = 1$.

Soit D la droite vectorielle dirigée $\overrightarrow{a}$

Comme $\overrightarrow{\varepsilon} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||}$ est un vecteur unitaire et directeur de D.

$$\text{Ainsi } p_D(\overrightarrow{u}) = \left\langle \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{\varepsilon}.$$

De plus $s_D = 2\,p_D - id$, ainsi $s_D(\overrightarrow{u}) = 2\left\langle \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{\varepsilon} - \overrightarrow{u}$

Démonstration : La démonstration est un longue. Identifions ce que l'on doit démontrer

> Étape 1 On commence par montrer que p_F est une projection, CàD p_F est un endomorphisme et $p_F \circ p_F = p_F$.
Comme maintenant p_F est une projection, on sait que

$$E = \ker p_F \oplus \ker\left(p_F - id\right)$$

et on dit que p_F est projection sur $\ker\left(p_F - id\right)$ et parallèlement à $\ker p_F$.

On va maintenant justifier le vocabulaire

> Étape 2 On démontre que $F = \ker\left(p_F - id\right)$

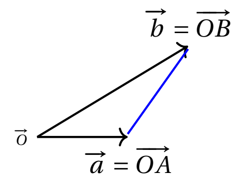
> Étape 3 On démontre que $F^{\perp} = \ker\left(p_F\right)$

Fini □

5.2 Distance d'un vecteur à un ssev

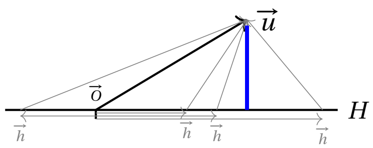
Rappel : Distance entre 2 vecteurs.

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \underbrace{\left\| \vec{a} - \vec{b} \right\|}_{\text{C'est } \left\|\overrightarrow{BA}\right\|} = \underbrace{\left\| \vec{b} - \vec{a} \right\|}_{\text{C'est } \left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \text{La longueur bleu}$$



Définition 20. Distance d'un vecteur à un ssev

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire.
Soit H un ssev et $\vec{u}$ un vecteur de E.



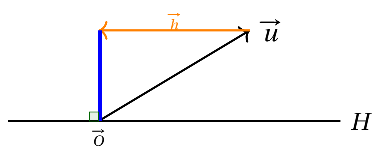
La distance entre H et $\vec{u}$, notée $d(\vec{u}, H)$, c'est

$d(\vec{u}, H) \overset{def}{=}$ la plus petite longueur entre $\vec{u}$ et un vecteur qcq de H

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a} \quad d(\vec{u}, H) &\overset{def}{=} \inf\Big(d(\vec{u}, \vec{h}) \text{ avec } \vec{h} \text{ qcq dans } H\Big) \\ &= \inf\Big(\left\| \vec{u} - \vec{h} \right\| \text{ avec } \vec{h} \; qcq\ dans\ H\Big) \\ &= \text{La longueur bleu} \end{aligned}$$

Théorème 21. Calcul de la distance d'un vecteur à un ssev

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire
Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $\vec{u}$ un vecteur de E.



> *Version pratique.*

Si trouve/détermine un vecteur $\vec{h} \in H$ tel que $\vec{u} + \vec{h}$ est orthogonal à H

alors $d(\vec{u}, H) = \| \vec{u} + \vec{h} \| =$ La longueur bleu

> *Version théorique.*

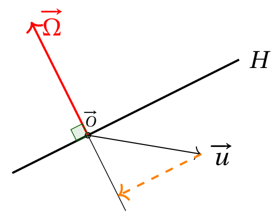
La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance

CàD $d(\vec{u}, H) = \left\| \vec{u} - \overrightarrow{p_F(\vec{u})} \right\|$

Théorème 22.
Distance d'un point à un hyperplan.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $\langle \odot, \odot \rangle$ un produit scalaire
Soit H un hyperplan de E et $\overrightarrow{\Omega}$ LA direction orthogonale.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E.

On a le dessin



On a : $d(\overrightarrow{u}, H)$ = la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{u}$ dans la direction $\overrightarrow{\Omega}$

Ainsi $d(M, \mathscr{D}) = \left|\left\langle \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{u} \right\rangle\right|$ avec $\overrightarrow{\varepsilon} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega}}{\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|}$ la direction unitaire orthogonale à H.

6 Retour sur la Covariance.

Définition 23. La covariance.
On considère deux V.a. X et Y
On définit la covariance de X, Y noté $cov(X, Y)$ par la formule :

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Moralité : la covariance mesure le degré d'indépendance.

Lorsque X, Y sont deux V.a. indépendantes
alors $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ et donc $cov(X,Y) = 0$

Cependant : $cov(X,Y) = 0 \not\Longrightarrow$ les V.a. sont indépendantes.

Théorème 24.
La covariance se comporte comme un produit scalaire.

> La covariance $cov(\odot, \odot)$ est bilinéaire, symétrique.

> $cov(X,X) = V(X)$ est toujours positif.

> Cependant $cov(X,X) = V(X) = 0$
$\Longrightarrow$ la V.a. X est simplement constante (et pas forcément nulle).

Conclusion : Il y a une analogie entre :
- d'une part $cov(X,Y)$ "ressemble" au produit scalaire $< \vec{u}, \vec{v} >$
- d'autre part $V(X)$ "ressemble" à $||\vec{u}||^2$

Remarque : l'écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$ "ressemble" à $||\vec{u}||$

Identités remarquables

$$V(X+Y) = V(X) + 2\,cov(X,Y) + V(Y)$$

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Exercice 6. Nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.

Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathscr{S}_n$, l'ensemble des permutations de $\{1,2,..,n\}$.
On tire au hasard une permutation de $\mathscr{S}_n$, on la note σ.
Pour $i \in \{1,2,..,n\}$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si i est un point fixe pour σ et 0 sinon.
On note $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de σ.

1. Soit $i \in \{1,2,..,n\}$.
   Déterminer $Card(\mathscr{S}_n)$ et $Card(X_i = 1)$,
   Justifier que la V.a. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
   En déduire que l'espérance de N vaut 1.
2. Déterminer $\mathbb{P}(N = n)$, $\mathbb{P}(N = n-1)$. Vérifier que $\mathbb{P}(N = n-2) = \dfrac{1}{2(n-2)!}$.
3. Étude de la V.a. $X_1 X_2$.
   Déterminer $Card\Big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\Big)$.
   Déduire la loi de la variable aléatoire $X_1 X_2$ puis calculer $cov(X_1, X_2) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.
   Les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes ?

On admet que les résultats ci-dessus se généralisent et que $\forall\, i, j \in \{1,2,..,n\}$, on a $cov(X_i, X_j) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

4. En déduire, en utilisant les identités remarquables, que la variance de N vaut 1.
5. (Bonus) Calculer $E(N^2)$. En déduire avec l'inégalité de Markov, montrer que : $\mathbb{P}\left(N \geqslant \dfrac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(N^2 \geqslant \dfrac{n^2}{4}\right) \leqslant \dfrac{8}{n^2}$

7 Exercices

Exercice 7. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \; et \; N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Calculer $\|M\|^2$, $\|N\|^2$, $\|M+N\|^2$ et $\|M-N\|^2$
3. Montrer que M et N sont orthogonales

Cauchy-Schwartz

Exercice 8. On se place dans $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire classique.

1. Expliciter, avec $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$, l'inégalité de Cauchy Schwartz.
2. Application 1.

   Montrer que : $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^+,\quad a+b+c \leqslant \sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
   Montrer que : $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^+,\quad ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2.$
3. Application 2.

   Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et X, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Montrer que : $\left(\sum_{k\in X(\Omega)} k\ \mathcal{P}(X=k)\right)^2 \leqslant \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\,\mathcal{P}(X=k)$

   Conclusion : La variance $V(X) = E(X^2) - e^2$ est toujours positive.

Exercice 9. On se place dans $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$.

1. Justifier que $\langle f, g\rangle$ définit un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$
   et énoncer dans ce contexte l'inégalité de Cauchy Schwartz.
2. Soient a et b tel que $0 < a < b$.

   Montrer que : $\ln\left({}^{b}/_{a}\right) \leqslant \dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$ *Indication :* $\ln b - \ln a = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$.
3. On suppose que f continue, positive de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$

   Montrer que : $\forall\ n, p \in \mathbb{N},\ \left(I_{n+p}\right)^2 \leqslant I_{2n}\,I_{2p}$

Bon

Exercice 10. On se place dans $E = \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$

1. On définit $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\,g(t)\,dt$.

   Justifier que $\langle f, g\rangle$ définit un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$.
2. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on considère la fonction $e_k : x \longmapsto \sin(kx)$.
   montrer que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est orthogonale.

Exercice 11. [Correction] **Exercice 1 de l'épreuve de CCP MP 2018 math2.**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = vect\{u, v\}$.
   Déterminer une base orthonormée de F.

— Aspect théorique de Gram-Schmidt —

Exercice 12. [Correction]

Partie 3 de l'épreuve de CCP MP 2018 math1.

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle \odot, \odot \rangle$, défini par : pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ Vect\{1, X, \dots, X^k\} = Vect\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_k\}.$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

1. Calculer P_0 et P_1.
2. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.
3. Justifier que pour $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. On prend $n \geqslant 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.
   (a) Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$
   et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1, 1]$.
   (b) On note $t_1, \dots, t_p$ les racines dans $[-1, 1]$ de multiplicité impaire du polynôme P_n,
   on pose $Q = (X - t_1)\dots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$.
   On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

   On suppose que $p < n$

   > Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)\,dt = 0$.

   > En regardant sa factorisation montrer que H est de signe constant sur $[-1, 1]$.

   > En déduire oups.

   (c) Conclure.

— L'orthogonal —

Exercice 13. [Correction] **D'après l'exercice 2 de l'épreuve de CCP MP 2015 math2.**
On considère les ensembles

$$F = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } M^T = M\right\}$$
$$G = \left\{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } N^T = -N\right\}$$

1. Justifier que $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que F et G sont deux ssev et donner leur dimension.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires.
4. Montrer que F et G sont orthogonaux.

Conclusion : F et G sont deux supplémentaires orthogonaux.

—— Distance d'un vecteur à un ssev ——

Exercice 14. Exemples de calculs de distance avec la définition.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire classique.

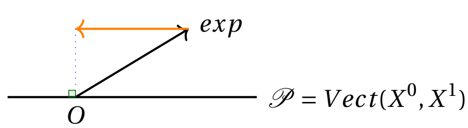
1. Soit $\mathscr{D} = Vect[(2,3,5)]$ et $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$
   Soit $\overrightarrow{h} \in \mathscr{D}$ ainsi il existe λ tel que $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{h_\lambda} = \lambda\,(2,3,5)$
   > Calculer $f(\lambda) = \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{h_\lambda}\right\|$.
   > Étudier les variations de f.
   > En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique λ_0
   > Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{h_{\lambda_0}}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.
2. Soit $\mathscr{P} = Vect[(1,2,1),(-1,1,1)]$ et $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$
   Soit $\overrightarrow{h} \in \mathscr{D}$ ainsi il existe α, β tel que $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{h_{\alpha,\beta}} = \alpha\,(1,2,1) + \beta(-1,1,1)$
   > Calculer $T(\alpha,\beta) = \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{h_{\alpha,\beta}}\right\|$.
   > Mettre le trinôme $T(\alpha,\beta)$ sous forme canonique. Les calculs sont lourds.
   > En déduire que le trinôme T admet un minimum atteint en un unique α_0, β_0
   > Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{h_{\alpha_0,\beta_0}}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$. Les calculs sont lourds.

Exercice 15. [Correction] **Exercice 1 de l'épreuve de CCP MP 2018 math2 suite.**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

On sait que, en posant pour f et g deux éléments de E, $\left(f|g\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ on définit un produit scalaire sur E

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{+1} t^n\,e^t\,dt$.
   Calculer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire les valeurs de I_0, I_1, I_2.
2. On note $w : t \mapsto e^t$ et $\mathscr{P} = \mathbb{R}_1[X] = Vect\left(X^0, X^1\right)$. On a le dessin

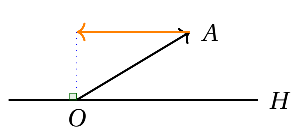


   Déterminer $d^2\left(w, \mathscr{P}\right) = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(e^t - (a+bt)\right)^2\,dt\right]$

Exercice 16. On se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle M, N\rangle = tr\left(M^T\,N\right)$

Soit H l'ensemble des matrices carrées 2×2 tel que $M^T = M$

1. Montrer que H est un ssev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(H) = 3$.
2. Soit le vecteur $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a le dessin



   Déterminer le vecteur orange et en déduire $d(M, H)$, la distance de M à H.

Correction.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

Q.1 L'intégrale d'une fonction continue existe sur un segment et $(.|.)$ est bien définie.

- La symétrie provient de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- La linéarité par rapport à la première variable découle essentiellement de la linéarité du passage à la limite (et de la distributivité de la multiplication sur l'addition).
- Si $f \in E$ alors $f^2 \geqslant 0$ et donc $(f|f) \geqslant 0$. Si cette quantité est nulle, f^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle et est donc nulle. f l'est donc aussi. Ceci nous donne le caractère défini positif.

$$\boxed{(.|.) \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

Q.2 On utilise Gram-Schmidt. Comme $(u|v) = \cdots = 0$ on trouve facilement que

$$\boxed{(\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \sqrt{\frac{3}{2}}v\right) \text{ est une b.o.n. de } F}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. Comme $\langle 1, 1\rangle = 2$, on a $\boxed{P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$. On calcule alors

$$Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0 = X \text{ et } \langle X, X\rangle = \frac{2}{3}$$

pour en déduire que $\boxed{P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_n est orthogonal aux P_i avec $i \leqslant n-1$ et donc à l'espace engendré par ces polynômes, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par ailleurs $P_n \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ est libre). Ainsi, P_n est de degré n.

$$\boxed{P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} \text{ et } \deg(P_n) = n}$$

3. Comme $n \geqslant 1$, $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle P_n, 1\rangle = 0$ i.e. $\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0}$.
Si, par l'absurde, P_n n'admettait pas de racine dans $[-1, 1]$ alors (théorème des valeurs intermédiaires avec P_n continu), P_n serait de signe constant sur $[-1, 1]$. Avec la continuité de P_n et $\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$, ceci entraînerait la nullité de P_n sur $[-1, 1]$. P_n serait alors le polynôme nul (infinité de racine) ce qui est faux.

$$\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1, 1]}$$

4. Par choix de Q, H n'admet que des racines de multiplicité paire. Sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors

$$H = a \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{2m_i} H_1(X)$$

où H_1 est un produit de polynômes de degré 2, unitaires, à discriminant < 0. H est alors de signe constant (selon le signe du coefficient dominant c).

Par ailleurs, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $p < n$) et donc $\langle P_n, Q\rangle = 0$, c'est à dire $\boxed{\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = 0}$.
Comme ci-dessus (continuité, intégrale nulle, signe constant), ceci entraîne la nullité de H (sur $[-1, 1]$ puis comme polynôme) et une absurdité (car ni P_n ni Q n'est nul et $\mathbb{R}[X]$ est intègre).
On peut en fait reprendre le raisonnement en ne considérant que les racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. On prouve alors par l'absurde qu'il y a n racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. Comme $\deg(P_n) = n$, les multiplicités valent 1 et on a toute les racines.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples dans } [-1, 1]}$$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) On se place dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire classique

$$\langle A, B\rangle = tr\left(A^T.B\right)$$

On note $\|...\|$ la norme associée au produit scalaire.
On considère $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } M^T = M\right\}$ et $\mathscr{A} = \left\{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } M^T = -M\right\}$

1. Généralité.

   (a) Classique mais A méditer

   → On va montrer que $\mathscr{S} = vect(...)$
   On a

$$\begin{aligned}
M &\in \mathscr{S} \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \text{ et } M^T = M \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&\quad \text{Donc } d = b,\ c = g,\ h = f \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&\quad = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots\dots\dots \\
&\Leftrightarrow M \in vect\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots.\right]
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathscr{S}$ est un ssev et la famille $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$ est génératrice de $\mathscr{S}$

   → La famille est libre car .... donc c'est une base et $\dim \mathscr{S} = card(Base) = 6$.

(b) On fait de même mais c'est moins lourd car a la fin il ne reste que 3 matrices.

$$
\begin{aligned}
M \quad &\in \quad \mathscr{A} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \text{ et } \quad M^T = -M \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&\quad\quad \text{Donc } \ d = -b,\ g = -c,\ h = -f \ \text{ et } \ a = e = i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad M \ = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -f \\ c & f & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad\quad\quad = b\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad M \in vect\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\mathscr{A}$ est un ssev et la famille $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathscr{A}$

→ La famille est libre car .... donc c'est une base et $\dim \mathscr{A} = card(Base) = 3$.

(c)

→ On va montrer que $\mathscr{S} \perp \mathscr{A}$
On suppose que $M \in \mathscr{S}$ et $N \in \mathscr{A}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \langle M, N \rangle = 0}$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle M, N \rangle &= tr\left(M^T N\right) = tr(MN) \text{ Car } M \in \mathscr{S} \text{ donc } M^T = M \\
\langle N, M \rangle &= tr\left(N^T M\right) \\
&= tr(-NM) \text{ Car } N \in \mathscr{A} \text{ donc } N^T = -N \\
&= -tr(NM) \\
&= -tr(MN) \text{ cat } tr(AB) = tr(BA.)
\end{aligned}$$

Comme $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$, on a $tr(MN) = -tr(MN)$ donc $tr(MN) = 0$

Conclusion on a bien $\langle M, N \rangle = tr(MN) = 0$

→ On va montrer que $\mathscr{S}^\perp = \mathscr{A}$.
Comme $\mathscr{S} \perp \mathscr{A}$, on a d'après la def de l'orthogonale $\mathscr{A} \subset \mathscr{S}^\perp$.
De plus

$$\begin{aligned}
\dim \mathscr{S}^\perp &= \dim \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) - \dim \mathscr{S} \\
&= 9 - 6 = 3
\end{aligned}$$

Conclusion : $\left[\mathscr{A} \subset \mathscr{S}^\perp \; ET \; \dim \mathscr{A} = 3 = \dim \mathscr{S}^\perp\right] \Rightarrow \mathscr{S}^\perp = \mathscr{A}$.

2. On considère la matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

Le but de cette question est de calculer $d(M, \mathscr{S})$

(a) Comme $\mathscr{S}^\perp = \mathscr{A}$, on sait que $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}^\perp = \mathscr{S} \oplus \mathscr{A}$, on a donc

$$\left.\begin{array}{r} M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \\ \\ \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{on peut écrire que } M = M_S + M_A \text{ avec } M_S, M_A \in \ldots$$

On a $M = M_S + M_A$ et $M^T = (M_S)^T + (M_A)^T = M_S - M_A$

$$\text{On résour le système } \left\{\begin{array}{l} M = M_S + M_A \\ \\ M^T = M_S - M_A \end{array}\right.$$

On trouve $M_S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ et $M_A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$

(b) Par définition de la projection orthogonale, on a $p(M) = M_S$, donc $d(M, \mathscr{S}) = \|M - M_S\|$.
De plus $M = M_S + M_A$ donc $M - M_S = M_A$

Conclusion : $d(M, \mathscr{S}) = \|M - M_S\| = \|M_A\|$.

(c) Application : On supppose que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow M_A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
d(M, \mathscr{S}) = \|M_A\| &= \sqrt{tr\left((M_A)^T M_A\right)} \\
&= \sqrt{\text{Somme des carrés des coef de } M_A} \\
&= \sqrt{1+4+1+1+4+1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

Q.1 L'intégrale d'une fonction continue existe sur un segment et $(.|.)$ est bien définie.

- La symétrie provient de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- La linéarité par rapport à la première variable découle essentiellement de la linéarité du passage à la limite (et de la distributivité de la multiplication sur l'addition).
- Si $f \in E$ alors $f^2 \geqslant 0$ et donc $(f|f) \geqslant 0$. Si cette quantité est nulle, f^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle et est donc nulle. f l'est donc aussi. Ceci nous donne le caractère défini positif.

$$\boxed{(.|.) \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

Q.2 On utilise Gram-Schmidt. Comme $(u|v) = \cdots = 0$ on trouve facilement que

$$\boxed{(\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \sqrt{\frac{3}{2}}v\right) \text{ est une b.o.n. de } F}$$

Q.3 D'après les règles de calcul en base orthogonale (et en notant p la projection orthogonale sur F)

$$p(w) = (\vec{\epsilon_1}|w)\vec{\epsilon}_1 + (\vec{\epsilon_2}|w)\vec{\epsilon_2} = \frac{1}{2}(w|u)u + \frac{3}{2}(w|v)v$$

Une intégration par partie donne, en posant $I_n = \int_{-1}^{1} t^n e^t \, dt$,

$$I_n = e - \frac{(-1)^n}{e} - nI_{n-1}$$

On en déduit que

$$I_0 = e - \frac{1}{e}, \ I_1 = \frac{2}{e}, \ I_2 = e - \frac{5}{e}$$

et ainsi

$$\boxed{p(w) = \frac{e+e^{-1}}{\sqrt{2}}\vec{\epsilon_1} + \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2}}\vec{\epsilon_2}}$$

On remarque que

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = \inf_{f \in F} \|w - f\|^2 = d(w,F)^2$$

On sait (théorème de la projection orthogonale) que cette distance est atteinte pour $f = p(w)$ et vaut donc $\|w - p(w)\|^2$. De plus avec Pythagore, on a

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = \|w\|^2 - \|p(w)\|^2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \left[\left(\frac{e+e^{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

Un calcul au brouillon permet de simplifier cette expression et d'obtenir

$$\boxed{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = \frac{e^2 - 7}{e^2}}$$