Permutations-Déterminant

1 Permutations 1
1.1 L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ . . . 1
1.2 Produit de cycle. . . . 2
1.3 Transposition et signature. . . . 3
1.4 Exercices . . . 4
2 Forme n-linaire alternée. 4
3 Déterminant. 6
3.1 Déterminant 2×2. . . . 6
3.2 Déterminant 3 × 3. . . . 7
3.3 Déterminant $n \times n$. . . . 8
3.4 Formulaire pour le Déterminant. . . . 9
3.5 Exercices. . . . 10
4 En classe. 12
4.1 Comatrice. . . . 12
4.2 Déterminant et systèmes. . . . 12
4.3 Déterminant et orientation. . . . 12

1 Permutations

1.1 L'ensemble $\mathfrak{S}_n$

Définition 1.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
Une permutation σ de $[\![1..n]\!]$ est une bijection de $[\![1..n]\!]$ sur $[\![1..n]\!]$

L'ensemble des permutations $[\![1..n]\!]$ est noté $\mathfrak{S}_n$ ou $\mathscr{S}_n$.

Vocabulaire classique.

> Les éléments fixes d'une permutation σ, c'est l'ensemble
$$\mathscr{F}ixe(\sigma) = \left\{x \in [\![1..n]\!] \text{ tel que } \sigma(x) = x\right\}$$

> Le support d'une permutation σ, noté $sup(\sigma)$, c'est l'ensemble non fixe,
$$sup(\sigma) = \left\{x \in [\![1..n]\!] \text{ tel que } \sigma(x) \neq x\right\}$$

On notera que : $\mathscr{F}ixe(\sigma) \cup sup(\sigma) = \{1, 2, ..., n\}$

Théorème 2. Propriétés de $\mathfrak{S}_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est un groupe (non commutatif) pour la composition
et id est son élément neutre

On a donc les propriétés

> L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est stable par composition, CàD
$$\left.\begin{array}{r}\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma' \in \mathfrak{S}_n\end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}_n$$

Et en général $\sigma \circ \sigma' \neq \sigma' \circ \sigma$

> L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est stable par passage à l'inverse, CàD
$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \Longrightarrow \text{La permutation réciproque } \sigma^{-1} \text{ existe et } \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$$

Démonstration : Il suffit de se rappeler les propriétés des bijections

> On sait qu'une composée de bijection est encore une bijection donc on a bien $\sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}_n$.

> Comme σ est une bijection, il y a une bijection réciproque donc σ^{-1} existe et comme son nom l'indique, on sait que σ^{-1} est une bijection.

1.2 Produit de cycle.

Décrire une permutation

Rappel : Une permutation σ est une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\{1, 2, ..., n\}$.

> Idée n°1. On donne la valeur de n et on liste les valeurs de $\sigma(i)$

Par exemple : La fonction σ de $\mathfrak{S}_4$ définie par

$$\sigma(1) = 4,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 1,\ \sigma(4) = 2$$

> Idée n°2. On décrit σ en rassemblant les valeurs $\sigma(i)$ dans une belle "matrice"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple la permutation ci-dessus s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Application. On a $card(\mathfrak{S}_n) = n!$

Démonstration : On va décrire les éléments de $\mathfrak{S}_n$

> Je choisis la valeur de $\sigma(1)$, J'ai n possibilités.
> Je choisis la valeur de $\sigma(2)$, J'ai $n-1$ possibilités.
Etc ...

Conclusion $card(\mathfrak{S}_n) = n!$

Définition 3. Qu'est ce qu'un cycle?

Un cycle, c'est une permutation σ, d'une forme particulière que l'on présente sous la forme

$$\sigma = \sigma_{(a\,b\,c\,d\,e)} = (a\,b\,c\,d\,e).$$

Exemple. On considère le cycle $\sigma = \sigma_{(1\,2\,6\,4)}$ dans $\mathfrak{S}_7$

> Comme $\sigma \in \mathfrak{S}_7$, on fait que σ est une bijection de $\{1, 2, .., 7\}$ sur $\{1, 2, .., 7\}$

> $\sigma = \sigma_{(1\,2\,6\,4)}$, signifie $(1 \rightarrowtail 2 \rightarrowtail 6 \rightarrowtail 4 \rightarrowtail 2)$ et 3 ↻, 5 ↻, 7 ↻ et même 42 ↻

> $support(\sigma_{(1\,2\,6\,4)}) = \{1, 2, 6, 4\}$ et La longueur du cycle , c'est 4.

Théorème 4. Propriétés des cycles

> Cyclique : $\sigma_{(1\,2\,6\,4)} = \sigma_{(2\,6\,4\,1)}$

> Bijection réciproque

$$\sigma^{-1}_{(1\,2\,6\,4)} = (1 \rightarrowtail 2 \rightarrowtail 6 \rightarrowtail 4 \rightarrowtail 1)^{-1} = (1 \leftarrowtail 2 \leftarrowtail 6 \leftarrowtail 4 \leftarrowtail 1) = \sigma_{(4\,6\,2\,1)}$$

> Lorsque les supports sont disjoints, les cycles commutent

$$\sigma \circ \sigma' = \sigma_{(1\,2\,6\,4)} \circ \sigma_{(3\,5)} = \sigma_{(3\,5)} \circ \sigma_{(1\,2\,6\,4)} = \sigma' \circ \sigma$$

> **Décomposition en produit de cycle.**

On peut décomposer les permutations en produit de cycle à supports disjoints.

1.3 Transposition et signature.

Définition 5.
Une transposition τ est un cycle de longueur 2, CàD $\tau = \tau_{(i\ j)} = \left(i\ j\right)$.

On a donc : $i \leftrightarrows j$ et les autres sont fixes.

Théorème 6. Décomposition en produit de transposition
> On peut décomposer un cycle en produit de transposition (et en plus c'est facile)

En effet $\sigma_{(1\,2\,6\,4)} = \tau_{(1\,2)} \circ \tau_{(2\,6)} \circ \tau_{(6\,4)}$

Attention cette décomposition n'est pas unique

$$\sigma_{(1\,2\,3)} = \tau_{(1\,2)} \circ \tau_{(2\,3)} = \tau_{(2\,3)} \circ \tau_{(3\,1)}$$

> Plus généralement, on peut décomposer les permutations en produit de cycle et les cycle en produit de transposition.

Conclusion : on peut décomposer toutes les permutations en produit de transposition.

Démonstration : Il est facile de justifier que $\sigma_{(1\,2\,6\,4)} = \tau_{(1\,2)} \circ \tau_{(2\,6)} \circ \tau_{(6\,4)}$. En effet, on a

$$\left[\sigma_{(1\,2\,6\,4)}\right](2) = 6 \; et \; \left[\tau_{(1\,2)} \circ \tau_{(2\,6)} \circ \tau_{(6\,4)}\right](2) = \left[\tau_{(1\,2)} \circ \tau_{(2\,6)}\right](2) = \left[\tau_{(1\,2)}\right](6) = 6$$

Comme une permutation se décompose en produit de cycle et les cycles se décomposent en produit de transposition, c'est facile

Théorème 7. Théorème de la parité
On considère une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$.

On sait que σ se décompose en produit de transposition,

Mais il y a plusieurs décompositions possibles, ainsi

$$\sigma = \tau_1.\tau_2...\tau_p = \tau'_1.\tau'_2...\tau'_q \text{ et à priori } p \neq q.$$

Le théorème de la parité dit que forcément : p et q ont la même parité.

Démonstration : La démonstration de "p et q ont la même parité" est difficile (ou très artificielle).
On l'admet comme le permet le programme.

Définition 8. Définition de la signature
On reprend les notations du théorème précédent.

La signature de σ, noté $\varepsilon(\sigma)$, est le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = (-1)^q$.

Théorème 9. Propriétés de la signature
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

> $\varepsilon(\sigma) = +1$ ou -1

> $\varepsilon(transposition) = -1$

Plus généralement $\varepsilon(cycle) = (-1)^{(longueur\_du\_cycle)-1}$

En effet, on a $\underbrace{(a\,b\,c\,d\,e)}_{5\ termes} = \underbrace{(a\,b).(b\,c).(c\,d).(d\,e)}_{4\ transposition}$,

> On a aussi

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \tau_1.\tau_2...\tau_p \\ \sigma' = \tau'_1.\tau'_2...\tau'_q \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma \circ \sigma' = \tau_1.\tau_2...\tau_p.\tau'_1.\tau'_2...\tau'_q$$

Donc $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\sigma')$

1.4 Exercices

Exercice 1. On considère les permutations de $\mathfrak{S}_7$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; et \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \; et \quad \sigma_{(132)} \circ \sigma_{(153)} \circ \sigma_{(654)} \circ \sigma_{(1234)}$$

Écrire les permutation sous forme de produits de cycles de supports disjoints

Exercice 2. On considère les permutations de $\mathfrak{S}_7$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; et \; \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \; et \; \sigma_{(132)} \circ \sigma_{(153)} \circ \sigma_{(654)} \circ \sigma_{(1234)}$$

Déterminer les signatures de ces permutations.

2 Forme n-linaire alternée.

Définition 10.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On dit que ϕ est une forme n-linéaire alternée de E est une fonction définie de $E \times E \times .. \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes.

Le déterminant une forme n-linéaire alternée
Donc je vais noter det à la place de ϕ

Rappel : les éléments de $E \times E \times .. \times E$ sont les listes de n vecteurs $\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right)$

> det$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, ..., \overrightarrow{z}\right)$ existe et c'est un nombre dans $\mathbb{R}$.
Cette propriété justifie le vocabulaire "forme"

> det se "distribue" sur chaque position
On a donc

$$\det(\underbrace{2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{u'}}_{position\ 1}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}) = 2\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right) - 3\det\left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{C_2}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right)$$

$$\det\left(\overrightarrow{C_1}, \underbrace{-5\overrightarrow{v} + 7\overrightarrow{v'}}_{position\ 2}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right) = -5\det\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right) + 7\det\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{C_3}, ..., \overrightarrow{C_n}\right)$$

$$Etc.......$$

Cette propriété, c'est la n-linéarité.

> Quand on échange deux vecteurs, alors le déterminant changent de signe
On a donc

$$\det\left(..., \overrightarrow{C_i}, ..., \overrightarrow{C_j}, ...\right) = \ominus \det\left(..., \overrightarrow{C_j}, ..., \overrightarrow{C_i}, ...\right)$$

Cette propriété justifie le vocabulaire "alternée".

Théorème 11. Déterminant et famille liée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et det une forme n-linéaire alternée de E.
Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ..., \vec{z})$ est une famille de n vecteurs de E

$$\text{Lorsque la famille } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ..., \vec{z}) \text{ est liée } \Longrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ..., \vec{z}) = 0$$

Applications.

S'il y a le vecteur nul alors le det est nul, CàD $\det\left(\vec{u}, \vec{0}, \vec{w}, ..., \vec{z}\right) = 0$

Lorsque 2 vecteurs sont parallèles alors le det est nul, CàD $\det\left(2\vec{A}, \vec{v}, 3\vec{A}, ..., \vec{z}\right) = 0$

Démonstration : La démonstration se fait en 2 temps

Comme det est "alternée", on sait que

$$\det\left(..., \vec{\square}, ..., \vec{\triangle}, ...\right) = \ominus \det\left(..., \vec{\triangle}, ..., \vec{\square}, ...\right)$$

J'applique cette égalité avec $\vec{\square} = \vec{\triangle} = \vec{A}$, ainsi $\det\left(..., \vec{A}, ..., \vec{A}, ...\right) = \ominus \det\left(..., \vec{A}, ..., \vec{A}, ...\right)$

Conclusion : $\det\left(..., \vec{A}, ..., \vec{A}, ...\right) = 0$

On vient de montrer que
Si dans une famille il y a 2 vecteurs égaux
alors le déterminant est nul

On considère maintenant une $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ..., \vec{z})$ est liée.

On sait que l'un des vecteurs est CL des autres par exemple $\vec{w} = CL(\vec{u}, \vec{v}, ..., \vec{z})$

Ainsi on a $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ..., \vec{z}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + ... + \gamma\vec{z}, ..., \vec{z})$

On distribue le déterminant

$= \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}, ..., \vec{z}) + \beta \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, ..., \vec{z}) + ..$
$+ ..... + \gamma \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}, ..., \vec{z})$

On applique $\det\left(..., \vec{A}, ..., \vec{A}, ...\right) = 0$

$= 0 + 0 + ... + 0$

Théorème 12. Déterminant et Permutation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et det une forme n-linéaire alternée de E.
Soit $\left(\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}, ..., \vec{C_n}\right)$ est une famille de n vecteurs de E.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, CàD σ est permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

$$\text{On a alors : } \det\left(\overrightarrow{C_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{C_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{C_{\sigma(3)}}, ..., \overrightarrow{C_{\sigma(n)}}\right) = \varepsilon(\sigma) . \det\left(\vec{C_1}, \vec{C_2}, \vec{C_3}, ..., \vec{C_n}\right)$$

Démonstration : En classe on fera la démonstration avec $n = 7$ et $\sigma = \sigma_{(1264)}$.

3 Déterminant.

3.1 Déterminant 2×2.

Théorème 13. Le déterminant 2×2

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et je note $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ la base

Alors il existe une unique fonction noté $\det_{\mathscr{B}}$
avec les propriétés suivantes

> $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme 2-linéaire alternée.

> $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})=1$.

De plus Si $\overrightarrow{u}=(x,y)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y')$ alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\det_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$$

Vocabulaire : $\det_{\mathscr{B}}$ C'est le déterminant relativement à la base $\mathscr{B}$

Démonstration : Démonstration du théorème.Préambule, on commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}\right) &= \text{On échange } i\longleftrightarrow j \ominus \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)=-1\\ \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i}\right) &= \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}\right)=\det\left(\ldots,\overrightarrow{A},\ldots,\overrightarrow{A},\ldots\right)=0\end{aligned}$$

On a maintenant

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) &= \det_{\mathscr{B}}\left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j},\overrightarrow{v}\right)\\ &\quad \text{On distribue det}\\ &= x\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{v}\right)+y\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{v}\right)\\ &= x\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}\right)+y\det_{\mathfrak{B}}\left(\overrightarrow{j},x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}\right)\\ &\quad \text{On distribue et on simplifie avec } \det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{A}\right)=0\\ &= xy'\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)+yx'\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}\right)\\ &= [xy'-yx']\det_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)\end{aligned}$$

On vient de montrer que la seule formule envisageable c'est $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$
il faudrait vérifier que cette formule convient (A faire).

Interprétation géométrique en terme d'aire.

3.2 Déterminant 3×3.

Théorème 14. Le déterminant 3×3

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et je note $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ la base canonique.

Alors il existe une unique fonction noté $\det_{\mathscr{B}}$
avec les propriétés suivantes

> $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme 3-linéaire alternée.

> $\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=1$.

De plus Si $\vec{u}=(x,y,z)$, $\vec{v}=(x',y',z')$ et $\vec{w}=(x'',y'',z'')$ alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\det_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}$$

L'astuce de Sarrus permet de retrouver

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{array}{l}xy'z''+yx''z'+zx'y''\\-xy''z'-yx'z''-zx''y'\end{array}$$

Démonstration : Préambule, on commence par remarquer que

$$\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right)=_{\text{On échange } i\longleftrightarrow j}\ominus\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=-1$$

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right)&=_{\text{On échange } i\longleftrightarrow j}\ominus\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right)\\&=_{\text{On échange } j\longleftrightarrow k}\ominus\ominus\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=+1\end{aligned}$$

$$\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{i},\vec{k}\right)=\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{j},\vec{k},\vec{j}\right)=\det(\textit{Famille liée})=0$$

Puis on poursuit comme pour le déterminant 2×2 et on obtient

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\left[\begin{array}{l}xy'z''+yx''z'+zx'y''\\-xy''z'-yx'z''-zx''y'\end{array}\right]\det_{\mathscr{B}}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$$

On vient de montrer que la seule formule envisageable c'est $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{array}{l}xy'z''+yx''z'+zx'y''\\-xy''z'-yx'z''-zx''y'\end{array}$
il faudrait vérifier que cette formule convient (A faire mais c'est vraiment lourd).

Fini □

Interprétation géométrique en terme de volume.

3.3 Déterminant $n \times n$.

Théorème 15. Déterminant d'une famille de n vecteurs

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et je note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\right)$ une base.

Alors il existe une unique fonction noté $\det_{\mathscr{B}}(...)$
avec les propriétés suivantes

> $\det_{\mathscr{B}}(...)$ est une forme n-linéaire alternée.

> $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = 1$.

Vocabulaire : $\det_{\mathscr{B}}(...)$ C'est le déterminant relativement à la base $\mathscr{B}$

De plus Si $\overrightarrow{u_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \overrightarrow{e_k}$ alors

$$\det{}_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}}_{\textit{Formule vraiment moche.}}$$

Démonstration : C'est le même calcul que pour les déterminants 2×2 et 3×3 mais en plus lourd. La démonstration n'est pas exigible.

Remarque : Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, on a alors

$\det_{\mathscr{B}}(....) = K \det_{\mathscr{B}'}(...)$ avec K est le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Définition 16. Déterminant d'une matrice $n \times n$

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice $n \times n$ alors on définit

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

On a donc

$$\det(A) = \det{}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n})$$

où $(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n})$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

3.4 Formulaire pour le Déterminant.

Théorème 17.

Propriétés du det en rapport avec les matrices

1. déterminant particulier.

   $> \det(\mathscr{O}_n) = 0$ et $\det(I_n) = 1$

   $> \det(\text{Diagonale}) = ...$

   $> \det(\text{Triangulaire}) = ...$

2. det et CL de matrice

   $> \det(A+B) = RIEN.$
   $> \det(\lambda A) =$ Voir plus loin.
   $> \det(2A-3B) = RIEN.$

3. det et produit : $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
4. det et inversible :

   A est inversible Ssi $\det(A) \neq 0$
   On a alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

5. det et transposition : $\det\left(A^T\right) = \det(A)$
6. det et Matrices diagonale ou triangulaire par Blocs.

Propriétés du det en rapport avec aux vecteurs.

1. det et CL de vecteurs:

$$\det\left(2u-3u', v, w, .., z\right) = 2\det(u, v, w, .., z) - 3\det\left(u', v, w, .., z\right)$$

   Et on peut faire la même chose sur les vecteurs lignes!

$$\begin{aligned} \text{Application : } \det(\lambda\, A) &= \det\left(\lambda\,\overrightarrow{C_1}, \lambda\,\overrightarrow{C_2}, .., \lambda\,\overrightarrow{C_n}\right) \\ &= \lambda^n \det\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n}\right) \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

   Ainsi $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

2. Déterminant et opérations de Gauss (pivot et bourrage)

   Les opérations de Gauss de pivot ou de bourrage ne changent pas le déterminant

   Ainsi avec les opérations de Gauss,
   on peut creuser les matrices.

3. On peut développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
4. det et Libre-Lié :

   $> \left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n}\right)$ est libre Ssi $\det\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n}\right) \neq 0$

   $> \left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n}\right)$ est liée Ssi $\det\left(\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}, .., \overrightarrow{C_n}\right) = 0$

3.5 Exercices.

Théorème 18.

On mine : On creuse, on factorise ce qui se présente.
puis on développe par rapport à une ligne/colonne.

Indirect : On justifie la forme puis des arguments particuliers concluent. (Voir Vandermonde)

Direct

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 4. Calculer <u>**et factoriser**</u> les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 3 & x+2 & -3 \\ 2 & 2 & x-3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ -2 & 2 & x-1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5. Calculer **par récurrence** le déterminant

$$A_n = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & . \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ . & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 6. [Correction] On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $\det(J) \neq 0$.
2. Calculer MJ. puis $\det MJ$
3. En déduire la factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Exercice 7. En bourrant, calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}_{[n]} \quad et \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & x & \ddots & & -a_1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & x & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x-a_n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Indirect

Exercice 8. Le Déterminant de Vandermonde.

Soit $\alpha_1,..,\alpha_n \in \mathbb{C}$. On va calculer

$$D(\alpha_1,..,\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & (\alpha_1)^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & (\alpha_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & (\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. On suppose que $\alpha_i = \alpha_j$. Calculer $D(\alpha_1,..,\alpha_n)$.

$$\boxed{\text{On suppose dorénavant que } \alpha_1,..,\alpha_n \text{ sont 2 à 2 } \neq}$$

2. On va étudier la fonction P définie par $P(X) = D(\alpha_1,..,\alpha_n, X)$.
   (a) Justifier que P est un polynôme de degré n.
   (b) Justifier que $\alpha_1,..,\alpha_n$ sont les racines de P. Factoriser P.
3. Calculer $D(\alpha_1,..,\alpha_n,\alpha_{n+1})$ en fonction de $D(\alpha_1,..,\alpha_n)$.
4. Exemple : Calculer $D(1,2,3,4,5)$

Exercice 9. On considère l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ y & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad (E)$$

1. Justifier que (E) est l'équation d'une droite. Je la note (D)
2. Expliquer pourquoi le point $A = (2,3) \in (D)$.
3. Décrire géométriquement la droite (D).

Exercice 10. On suppose que $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $b \neq c$.
On considère les déterminantq

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ c & & \ddots & a & b \\ c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}_{[n]} \quad \text{et } f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & \cdots & b+x \\ c+x & a+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & & \ddots & a+x & b+x \\ c+x & c+x & \cdots & c+x & a+x \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. Justifier que la fonction f est affine CàD de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$.
2. En déduire D.

Un joli exercice

Exercice 11. [Correction]

1. Soit A une matrice de taille $2n+1$ et anti-symétrique, CàD $A^T=-A$.
   Montrer que $\det(A)=0$.
2. Soit A une matrice de taille $2n$ et anti-symétrique et λ un complexe.
   (a) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1\cdots 1 \\ -1 & \\ \vdots & A \\ -1 & \end{vmatrix}$

   En déduire que : $\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots 1 \\ -\lambda & \\ \vdots & A \\ -\lambda & \end{vmatrix} = \det(A)$

   (b) On note J la matrice Atilla de taille $2n$, CàD avec des 1 partout.
   Montrer que $\det(A+\lambda J)=\det(A)$

Avec la méga formule

On rappelle que

$$\det(A)=\det(C_1,..,C_n)=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$$

Exercice 12. Soit A une matrice $n\times n$ fixée. On pose

$$P(x)=\det(xI_n-A)=\begin{vmatrix} x-c_{11} & \cdots & -c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -c_{n1} & \cdots & x-c_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\deg\left(c_{\sigma(1)1}\dots c_{\sigma(n)n}\right)\leqslant n$
2. Montrer si $\sigma\neq id$, alors $\deg\left(c_{\sigma(1)1}\dots c_{\sigma(n)n}\right)\leqslant n-2$
3. En déduire que
$$P(x)=\det(xI_n-A)=x^n-tr(A)\,x^{n-1}+\dots+(-1)^n\det(A)$$

Exercice 13. Soit la matrice

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots & x_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \alpha \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(n)\ c_{\sigma(1)1}\dots c_{\sigma(n)n}$$

1. Montrer si $\sigma\neq id,(1n),(2n),..$ ou $(n-1,n)$ alors $c_{\sigma(1)1}\dots c_{\sigma(n)n}=0$
2. En déduire la valeur du déterminant.

4 En classe.

4.1 Comatrice.

4.2 Déterminant et systèmes.

4.3 Déterminant et orientation.