

————— Application du cours —————

Exercice 1. Dans \mathbb{R}^n avec le p.s. classique.

1. On se place dans \mathbb{R}^3 avec le le p.s. classique $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x x' + y y' + z z'$

> Énoncé l'inégalité de Cauchy Schwartz.

> Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, a + b + c \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. On se place dans \mathbb{R}^n avec le le p.s. classique $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k$

> Énoncé l'inégalité de Cauchy Schwartz.

> Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé et X , une variable aléatoire à valeurs dans $[1, n]$.

$$\text{Montrer que : } \left(\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k)$$

Conclusion : La variance $V(X) = E(X^2) - e^2$ est toujours positive.

Exercice 2. On se place dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire classique $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt$

1. Énoncé l'inégalité de Cauchy Schwartz.

2. Soient a et b tel que $0 < a < b$, montrer que

$$\ln \left(\frac{b}{a} \right) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

$$\text{Indication : } \ln b - \ln a = \int_a^b \frac{1}{x} dx.$$

3. On suppose que f continue, positive de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On considère } I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

$$\text{Montrer que : } \forall n, p \in \mathbb{N}, (I_{n+p})^2 \leq I_{2n} \cdot I_{2p}$$

———— Heureusement c'est détaillé ————

Exercice 3. [Correction] **L'inégalité de Hardy**

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} et F la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. Justifier que F est \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$,
puis montrer (à l'aide d'un DL) que la fonction se prolonge par continuité en 0 avec $F(0) = f(0)$.
2. Montrer, à l'aide d'une IPP, que : $\int_0^1 F^2(x) dx \leq 2 \int_0^1 F(x)f(x) dx$.
3. Énoncé l'inégalité de Cauchy Schwartz pour le produit scalaire $\langle g | h \rangle = \int_0^1 g(t)h(t) dt$

En déduire que : $\int_0^1 F^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 f^2(x) dx$ C'est l'inégalité de Hardy

Exercice 4. [Correction] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], [f(x)]^2 \leq x \int_0^1 [f'(t)]^2 dt$.

Indication : Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ puis utiliser Cauchy-Schwartz

2. En déduire que : $\int_0^1 f^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [f'(t)]^2 dt$

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) 1. > Le nombre $\varphi := x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ se calcule Ssi la fonction $t \mapsto f(t)$ est continue sur $[0, x]$

donc la fonction φ est définie sur $[0, 1]$ et la fonction F est définie sur $]0, 1]$.

Comme f est continue, on sait (théorie de l'intégration) que F est \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$.

> De plus comme f est continue, on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + o(1)$

avec le théorème de primitivation des DL, on a $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{\varphi(0)}_{=0} + x f(0) + o(x)$

Conclusion : $F(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x f(0) + o(x)}{x} = f(0) + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$
la fonction F se prolonge par continuité en 0 avec $F(0) = f(0)$.

2. On fait une IPP à partir de $\int_0^1 F(x)f(x) dx$

$$u = F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dx \rightsquigarrow u' = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{-F(x)}{x} + \frac{f(x)}{x}$$

$$v' = f(x) \rightsquigarrow v = \int_0^x f(t) dt = xF(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \int_0^1 F(x)f(x) dx &= [xF^2(x)]_0^1 - \int_0^1 xF(x) \left(\frac{-F(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) dx \\ &= F^2(1) + \int_0^1 F^2(x) dx - \int_0^1 f(x)F(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } 2 \int_0^1 F(x)f(x) dx = F^2(1) + \int_0^1 F^2(x) dx \geq 0 + \int_0^1 F^2(x) dx$$

3. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 F^2(x) dx &\leq \int_0^1 F(x)f(x) dx \\ &\leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\| = \left(\int_0^1 F^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } 0 \leq \left(\int_0^1 F^2(x) dx \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \text{ puis on élève au carré.}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) 1. Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f^2(x) - f^2(0) \\ &= \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2 \\ &= \langle u, v \rangle^2 \\ &\leq \|u\|^2 \|v\|^2 \\ &\leq \int_0^x 1^2 dt \int_0^x f'^2(t) dt \\ &\text{On majore } \int_0^x f'^2(t) dt \text{ par } \int_0^1 f'^2(t) dt \text{ car } 0 \leq x \leq 1 \\ &\leq x \int_0^1 f'^2(t) dt \end{aligned}$$

2. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], [f(x)]^2 \leq x \int_0^1 [f'(t)]^2 dt$.

Indication : Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ puis utiliser Cauchy-Schwartz

3. On intègre l'inégalité précédente sur $[0, 1], \dots$