

Somme double et famille sommable.

1 Somme double finie	1
2 Somme double "infiniment" problématique	4
2.1 Changer l'ordre des termes ou commutativement sommable	4

2.2 Permuter les sommes	5
3 Familles sommables	7
3.1 Définition	7
3.2 Série simple sommable.	8
3.3 Série double sommable.	9
3.4 Sommation par paquets et Produit de Cauchy . .	11

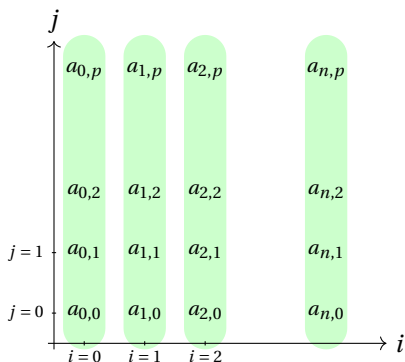
1 Somme double finie

Théorème 1. Tableau rectangulaire

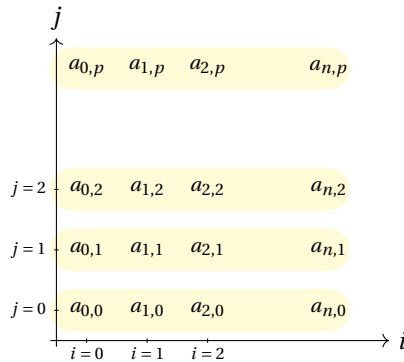
Soit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ que l'on visualise dans un tableau (voir ci-dessous), on a

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p a_{i,j} \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^p a_{i,j} \right)$$

$$\sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^n a_{i,j} \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=0}^n a_{i,j} \right)$$



On somme le tableau en colonne



On somme le tableau en ligne

Comme le tableau est rectangulaire (fini),

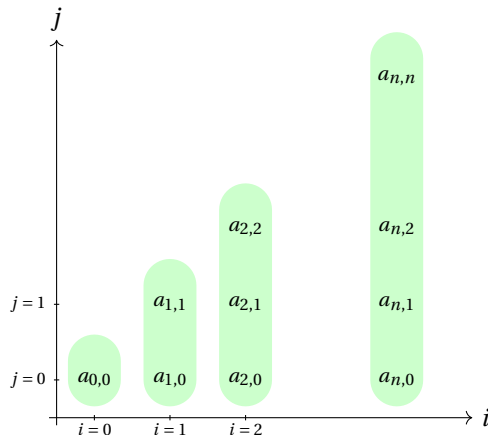
on a :
$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p a_{i,j} = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^n a_{i,j}$$

Théorème 2. Tableau triangulaire

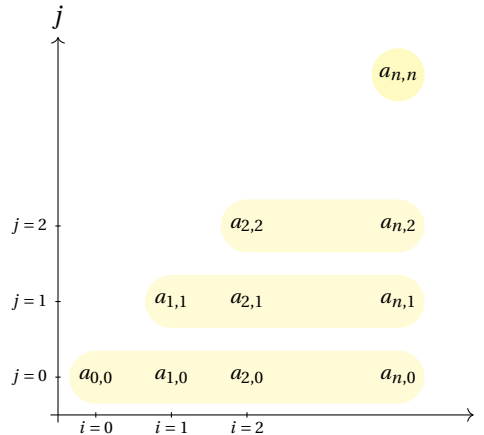
Soit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ que l'on visualise dans un tableau (voir ci-dessous), on a

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i a_{i,j} \right)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{i,j} \right)$$



On somme le tableau en colonne



On somme le tableau en ligne

Comme le tableau est triangulaire (fini),

$$\text{on a : } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}$$

Exercice 1. [Correction]

1. **Académique.** Écrire les sommes sous forme de somme double et finir le calcul.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$$

2. **Exemples classiques** Calculer les sommes.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2^{2i-j} \quad \sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k 2^k \right) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i} X^j$$

Exercice 2. Avec les v.a. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une V.A. à valeurs dans \mathbb{N} .

Montrer que : $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(X \geq k)$.

Exercice 3. Avec les matrices.

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carrées de taille $n \times n$.

1. Calculer $tr(AB)$.
2. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.

Exercice 4. Avec les intégrales.Soit $0 < a < b$. Calculer

$$\int_a^b e^{-xt} dx \quad \text{puis} \quad \int_{-0}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

Exercice 5. [Correction] La partie II de Math 2-e3a-MP-2019Soit Q un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$.On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$.On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

**L'objectif de cette partie est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$
à partir des coefficients du polynôme Q .**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer que, pour tout entier naturel $m \geq 1$, on a :

$$X^m - a^m = (X - a) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k} \right)$$

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note Q_i le polynôme défini par : $Q_i(X) = \frac{Q(X)}{X - \alpha_i}$.Montrer que Q' est une combinaison linéaire des Q_i que l'on déterminera.3. En remarquant que $Q_i(X) = \frac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$, montrer que l'on a :

$$Q_i(X) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$$

4. Dédurre des questions 2 et 3 que l'on a : $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, r b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j$.5. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Exprimer T_k en fonction de T_0, \dots, T_{k-1} et des coefficients du polynôme Q .6. Soit $k \geq n$.(a) Montrer que l'on a : $\sum_{j=0}^n b_j T_{k-n+j} = 0$.(b) Exprimer alors T_k à l'aide de $T_{k-n}, T_{k-n+1}, \dots, T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q .

7. Conclure.

2 Somme double "infiniment" problématique

2.1 Changer l'ordre des termes ou commutativement sommable

Considérons la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

On sait d'après le critère spécial des séries alternées, la série converge et avec le TTAFF sur $[0, 1]$ avec $t \mapsto \ln(1+t)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Rappel : Normalement La somme infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ se calcule en additionnant les chiffres les uns après les autres.

Permutons et ré-associions ses termes de la façon suivante

Pour $a = 2k + 1$ impair, on considère le triplet $a, 2a, 2a + 2 = 2k + 1, 2k + 2, 2k + 4$

On peut vérifier que

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{a \text{ impair}} \{a, 2a, 2a + 2\} = \left\{ \underbrace{1, 2, 4}_{a=1}, \underbrace{3, 6, 8}_{a=2}, \underbrace{5, 10, 12}_{a=3}, \dots \right\}$$

On fait le calcul maintenant

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{\text{tous } n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= \sum_{a \text{ impair}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+2} \right) \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{a=1} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{a=2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= \frac{\ln 2}{2} \quad \text{OUPS!!!!} \end{aligned}$$

Conclusion :

- > Il y a un réel problème mathématique à permuter l'ordre des termes d'une série convergente.
- > La somme d'une série dépend (à priori) de l'ordre dans lequel on additionne les termes.
- > Il est donc hors de question de noter $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ la somme de la série harmonique alternée, car une telle notation n'indique pas dans quel ordre on été sommés ses termes...

On peut d'ailleurs démontrer encore plus étrange que ce résultat déjà étonnant : en modifiant autrement l'ordre de sommation de cette même série, on aurait tout aussi bien pu aboutir à une série divergente ou à une série convergente dont la somme serait égale $41, \pi$ ou 1492 (ce résultat est expliqué en annexe)!

2.2 Permuter les sommes

Il est bien connu, bien que l'on ne sache d'ailleurs pas toujours pourquoi, que l'on peut permuter l'ordre des sommations quand on manipule des sommes finies. Ainsi n'hésite-t-on pas à écrire, si $(z_{n,p})_{1 \leq n \leq N, 1 \leq p \leq P}$ désigne une famille de complexes :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P z_{n,p} = \sum_{p=0}^P \sum_{n=0}^N z_{n,p}.$$

Observons un peu de quoi il s'agit, en choisissant par exemple $N = 3$ et $P = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^2 z_{n,p} &= \sum_{n=1}^3 (z_{n,1} + z_{n,2}) = (z_{1,1} + z_{1,2}) + (z_{2,1} + z_{2,2}) + (z_{3,1} + z_{3,2}), \\ \text{et } \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^3 z_{n,p} &= \sum_{p=1}^2 (z_{1,p} + z_{2,p} + z_{3,p}) = (z_{1,1} + z_{2,1} + z_{3,1}) + (z_{1,2} + z_{2,2} + z_{3,2}). \end{aligned}$$

Le fait que ces sommes soient égales résulte donc

- > de la commutativité de l'addition
- > Mais aussi de son associativité!

On vient de voir que la permutation des termes dans une somme infinie ne se fait pas sans difficulté. On peut donc imaginer sans peine, au vu de ce qui précède, que l'interversion de deux sommes infinies risque, elle aussi, de poser quelques problèmes mathématiques...

Prenons un premier exemple pour illustrer ces difficultés

Les valeurs prises par la suite double $(z_{n,p})_{n,p \geq 1}$ figurent dans le tableau suivant, n étant l'indice de ligne et p l'indice de colonne :

$z_{n,p}$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$...
$n = 1$	1	-1	0	0	0	...
$n = 2$	0	1	-1	0	0	...
$n = 3$	0	0	1	-1	0	0
$n = 4$	0	0	0	1	-1	0
$n = 5$	0	0	0	0	1	-1
...	0	0	0	0	0	1

La somme infinie $\sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne,

elle existe donc pour tout n et vaut 0.

Il en résulte que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}}_{\text{Ligne } n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{0}_{\text{Ligne } n} \right) = 0.$$

De la même façon, la somme infinie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ colonne,

elle existe donc pour tout p et vaut 0, sauf pour $p = 1$ où elle vaut 1.

Il en résulte que
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}}_{\text{Colonne } p} = \underbrace{1}_{\text{Colonne } 1} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\underbrace{0}_{\text{Colonne } p \geq 2} \right) = 1$$

On a donc construit un exemple très simple de suite double

telle que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p} \neq \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}.$$

Modifions un tout petit peu l'exemple précédent pour illustrer un autre problème

$z_{n,p}$	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	...
n = 1	1	-1	0	0	0	...
n = 2	0	2	-2	0	0	...
n = 3	0	0	3	-3	0	0
n = 4	0	0	0	4	-4	0
n = 5	0	0	0	0	5	-5
...	0	0	0	0	0	6

Ici encore, la somme infinie $\sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne,

elle existe donc pour tout n et vaut 0 .

Il en résulte que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Mais la somme infinie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ colonne,

elle existe donc pour tout p et vaut 1 .

Il en résulte que la série $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ est divergente!

Cet exemple prouve par conséquent que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ peut exister
 et que $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ n'existe pas...

3 Familles sommables

Toutes les démonstrations seront dans la version électronique

3.1 Définition

Définition 3. Famille sommable théorique

Soit I un ensemble d'indice (souvent $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombre (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C})

> On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable

Ssi s'il existe une constante positive M telle que, pour toute partie finie J de I , on ait $\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

On définit alors la somme, notée $\sum_{i \in I} u_i$, de la famille sommable $(u_i)_{i \in I}$

comme étant la borne supérieure de ces sommes finies : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i$

Dans le cas où une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on convient de poser $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

> On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels de signe qcq et/ou de complexe est sommable

Ssi la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ des V.A. et/ou module est sommable

3.2 Série simple sommable.

Théorème 4. Une série absolument convergente est sommable

Comme le tire l'indique,

La famille (a_n) est sommable Ssi la série $\sum a_n$ est **Absolument** convergente.

ainsi on a

> la série $\sum u_n$ est convergente.

> La valeur de la série ne change pas quand on permute les termes,

CàD pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente et l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

> La valeur de la série ne change pas quand on regroupe par paquet

$$\text{CàD } \sum_{\text{Tous}} a_n = \left(\sum_{\text{pair}} a_n \right) + \left(\sum_{\text{impair}} a_n \right)$$

Exemple 1 : La série harmonique alternée

La série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas sommable car elle n'est pas absolument convergente

$$\text{En effet } S_N = \sum_{n=1}^N \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

L'exemple page 4 illustre la non commutativité.

Exemple 2 : Les séries de Euler et de Euler alternée

Les séries de Euler $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de Euler alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ sont sommables

car elle sont absolument convergentes

$$\text{Ainsi on a } \sum_{\text{Tous}} \frac{1}{n^2} = \left(\sum_{\text{pair}} \frac{1}{n^2} \right) + \left(\sum_{\text{impair}} \frac{1}{n^2} \right)$$

De plus on sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\text{Tous}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ainsi on a

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{pair } n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{impair } n^2} \stackrel{\text{Sommable}}{=} \sum_{\text{Tous}} \frac{1}{n^2} - \sum_{\text{pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \sum_{\text{Tous}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \stackrel{\text{Sommable}}{=} \left(\sum_{\text{pair}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) + \left(\sum_{\text{impair}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) \\ &= \left(\sum_{\text{pair}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) + \left(\sum_{\text{impair}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) \\ &= \left(\sum_{\text{pair}} \frac{-1}{n^2} \right) + \left(\sum_{\text{impair}} \frac{+1}{n^2} \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

3.3 Série double sommable.

Théorème 5. Critère "pratique" et propriétés

La famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est sommable

Ssi une des 2 séries doubles $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |a_{p,q}|$ ou $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |a_{p,q}|$ converge et/ou majorée

Ssi les sommes partielles doubles $\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M |a_{p,q}|$ sont uniformément majorées

ainsi on a

toutes ces séries ci-dessous convergent et on a la formule d'interversion (théorème de Fubini) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

Remarque : le théorème du Fubini est encore valide pour les tableaux triangulaires.

Exemple 1 : Série double de type géo

Soit a un réel élément de $[0, 1[$. On considère la famille $(a^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.

On rappelle que pour $|x| < 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - 1 = \frac{x}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a^{pq}| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a^{pq} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} (a^p)^q \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p}{1-a^p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p}{1-a} \\ &\leq \frac{1}{1-a} \sum_{p=1}^{\infty} a^p \\ &\leq \frac{1}{1-a} \frac{a}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

On a majoré la série double donc la famille est sommable.

Exemple 2

On considère la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$

Par une comparaison classique avec une intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \frac{1}{p^2 + q^2} &\geq \sum_{q=1}^N \int_q^{q+1} \frac{1}{p^2 + t^2} dt \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{p^2 + t^2} dt \\ &\text{On a } \frac{1}{p^2 + t^2} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + (t/p)^2}, \text{ ainsi une primitive est } \frac{1}{p} \arctan\left(\frac{t}{p}\right) \\ &\geq \left[\frac{1}{p} \arctan\left(\frac{t}{p}\right) \right]_p^{N+1} \\ &\geq \frac{1}{p} \left(\arctan \frac{N+1}{p} - \arctan \frac{1}{p} \right) \\ &\text{En choisissant } N \text{ de telle sorte que } N = 2p - 1, \text{ on a donc} \\ &\geq \frac{1}{p} \left(\arctan 2 - \arctan 1 \right) = \frac{\alpha}{p} \end{aligned}$$

Mais la série $\sum \frac{\alpha}{p}$ est divergente à termes positifs, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$.

Par suite, pour tout réel $A > 0$, il existe un entier n tel que $\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^{2p-1} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq A$

Conclusion : les sommes partielles doubles de la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ ne sont pas majorées,

Cette famille n'est pas sommable.

Exemple 3. Soit la suite double $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n,p \geq 2}$.

La famille double est-elle sommable ?

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right) \text{ avec } \square = 1/n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\square^2}{1 - \square} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = 1 \quad \text{série télescopique} \end{aligned}$$

Conclusion : la série double est sommable et vaut 1.

Avec Fubini, on en déduit que $1 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right)$

Or on note traditionnellement avec ζ la fonction dzéta de Riemann.

- > Pour $p = 2$, on a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1$
- > Pour $p = 3$, on a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$
- > Pour $p = 4$, on a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) - 1$

Finalement, on a prouvé la convergence de la série $\sum \left(\zeta(p) - 1 \right)$,

$$\text{et l'on a de plus : } \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\zeta(p) - 1 \right) = 1$$

3.4 Sommation par paquets et Produit de Cauchy

Théorème 6. Sommation par paquets

Soit $(u_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille, et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition du tableau des indices.

On suppose que la famille $(u_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est sommable, on a :

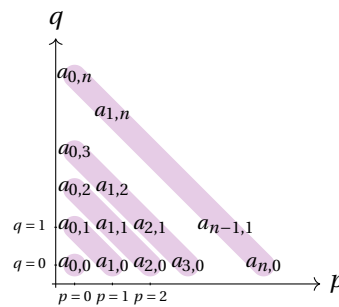
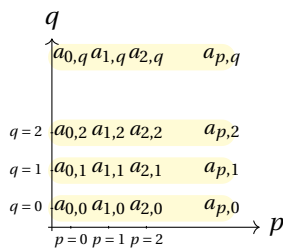
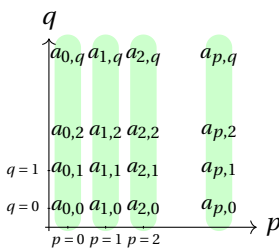
- > Pour tout entier n , la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable
- et
- > La série $\sum (\sum_{i \in I_n} u_i)$ est convergente.

$$\text{On a alors : } \sum_{p,q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} u_i \right)$$

Application : On retrouve Fubini et Cauchy

On décompose d'une part le tableau des indices en colonne, d'autre part le tableau des indices en colonne et même en diagonale, on obtient

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)}_{\text{La colonne } C_p} = \sum_{q=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)}_{\text{La ligne } L_q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right)}_{\text{La diagonale } D_n}$$



Théorème 7. produit de Cauchy

Soient deux séries réelles/complexes $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ qui sont absolument convergentes.

Alors la série double $\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q x^q \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q x^{p+q}$ est sommable et on a

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q x^q \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q x^{p+q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) x^n$$

Conclusion : Développer comme pour les polynômes sont encore valide pour les séries A-convergente.

Exemple Pour $|a| < 1$, on a vu (exemple 1 page 9) que la famille $(a^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

> D'une part, on calcule la somme du tableau par colonne

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a^{pq} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a^{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a^p \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$$

> D'autre part, à la mode bizarre CàD en regroupant les couples (p, q) avec $pq = n$

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a^{pq} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{pq=n} a^{pq} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{pq=n} a^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^n \sum_{pq=n} 1 \right)$$

Mais $\sum_{pq=n} 1$ compte le nombre de couples (p, q) dont le produit vaut n ,

et il y en a évidemment autant qu'il y a de diviseurs de n .

Traditionnellement on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n

Conclusion : en sommant de deux manières différentes la famille sommable $(a^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$

On obtient la formule séduisante suivante, valable pour tout nombre a de $[0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) a^n$$