Convexité.

Définition 1.
Soit I un intervalle et f une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> On dit que f est convexe sur I Ssi
Ssi son graphe est au-dessous de toutes ses cordes

> On dit que f est concave sur I Ssi
Ssi son graphe est au-dessus de toutes ses cordes.

1 Les inégalités classiques

Théorème 2. Alors f est convexe
Soit f une fonction 2 fois dérivable sur l'intervalle I.

On suppose que $f'' \geqslant 0$ sur I alors f est convexe sur I et on a

et on a $\forall\, x \in I,\ Tangente(x) \leqslant f(x) \leqslant Corde(x)$

Rappel/Complément

> L'équation de la corde passant par $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$
c'est ....

> L'équation de la tangente en $x = a$
c'est ....

Démonstration Supposons $f'' \geqslant 0$ et que $a, \in I$

$$\boxed{\text{Montrons que le graphe de } f \text{ est au-dessous de sa corde passant } a, b.}$$

On va étudier sur $[a, b]$, la fonction dérivable $h : x \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x)$

$$\text{On a } \forall\, x \in I, \quad h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x) \quad et \quad h''(x) = -f''(x) \leqslant 0$$

On fait le tableau de variation de h pour chacune des situations et cela conclut

Démonstration Supposons $f'' \geqslant 0$ et que $a, \in I$

$$\boxed{\text{Montrons que le graphe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente en } a.}$$

On va étudier sur $[a, b]$, la fonction dérivable $h : x \mapsto f(x) - \left[f'(a)(x - a) + f(a)\right]$
On fait le tableau de variation de h et on conclut

2 L'inégalité de Jensen.

Description des segments

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a $c \in [x, x'] \iff$ Il existe $t \in [0,1]$ tel que $c = (1-t)\,x + t\,x'$
$\iff$ il existe $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha + \beta = 1$ tel que $c = \alpha\,x + \beta\,x'$

Théorème 3. Inégalité de Jensen d'ordre 1 et d'ordre n
Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe.

> Alors on a : *Inégalité de Jensen d'ordre* 1

$$\forall\, x, x' \in I, \forall\, \alpha, \beta \in [0,1] \text{ avec } \alpha + \beta = 1,\ f\left(\alpha\,x + \beta\,x'\right) \leqslant \alpha\,f(x) + \beta\,f(x')$$

Cette inégalité est le plus souvent utilisé

avec $\alpha = \dfrac{1}{p}$ et $\beta = \dfrac{1}{q}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ainsi $f\left(\dfrac{1}{p}\,x + \dfrac{1}{q}\,x'\right) \leqslant \dfrac{1}{p}\,f(x) + \dfrac{1}{q}\,f(x')$

> Alors on a : *Inégalité de Jensen d'ordre* n

Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,f(x_i)$$

Cette inégalité est le plus souvent utilisé avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = {}^1/_n$, on a alors

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\,x\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_n) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

3 Croissance des pentes

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et $c \in I$.
On considère la fonction $Pente_c(x) \longmapsto \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} =$ *la pente entre* $\underbrace{c}_{fixe}$ *et* $\underbrace{x}_{mobile}$

La fonction $Pente_c$ est définie sur $\mathscr{D} = [a, c[\cup]c, b]$

Théorème 4. Croissance des pentes
On suppose que la fonction f est convexe

Alors La fonction $Pente_c$ est croissante sur $\mathscr{D}$

Démonstration : On suppose que la fonction f est convexe et que $x \leqslant x'$,

On va montrer que : $Pente_c(x) \leqslant Pente_c(x')$

CàD $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant \dfrac{f(x') - f(c)}{x' - c}$

Il y a trois situations à considérer : $c < x < x'$ ou $x < c < x'$ ou $x < x' < c$

Lorsque $c < x < x'$

Comme $x \in [c, x']$, on sait que $x = (1-t)\,c + t\,x'$ avec $t \in [0,1]$

On a donc $t = \dfrac{x - c}{x' - c}$.

On applique l'inégalité de convexité ainsi $f(x) = f\left((1-t)\,c + t\,x'\right) \leqslant (1-t)\,f(c) + t\,f(x')$.

On a donc $f(x) - f(c) \leqslant t(f(x') - f(c))$.

Comme $t = \dfrac{x - c}{x' - c}$, on remplace et on divise par $x - c > 0$, ainsi on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant \dfrac{f(x') - f(c)}{x' - c}$

Lorsque $x < c < x'$ ou $x < x' < c$ On fait exactement pareil, le point au milieu est de la forme $(1-t)\ldots + t\ldots$ avec $t \in [0,1]$

Théorème 5. Réciproque
On suppose que pour tout $c \in \mathscr{D}$, la fonction $Pente_c$ est croissante sur $\mathscr{D}$

Alors la fonction f est convexe

Démonstration : Soient $x, y \in I$ distincts.

On applique l'inégalité précédente (croissance de la pente) à $z = (1-t)x + ty$. On retrouve bien $f\left((1-t)x + ty\right) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$.

4 Exercices

Un peu théorique

Exercice 1. Soient deux réels distincts a et b, une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Exercice 2.

1. Préciser les valeurs du réel α pour lesquelles $x \mapsto x^\alpha$ est convexe ou concave.
2. En déduire que pour tous $x \geqslant 0$ et $\alpha > 0$, $x^{\alpha+1} \geqslant (\alpha+1)x - \alpha$.

Inégalité de Jensen d'ordre 1

Exercice 3. Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

Exercice 4. Montrer que pour tous $x, y > 1$, $\sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Exercice 5. Montrer que pour tous réels x, y, a, b strictement positifs,

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(1+e^x\right)$

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ $1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$

Inégalité de Jensen d'ordre n

Exercice 7.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est convexe/concave sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

Exercice 8.

1. Montrer que $x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, l'inégalité :

$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)}$$

3. En déduire que pour tous $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} v_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (u_k+v_k)}$$

Exercice 9. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout réel $p > 1$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = \left(y_1, \dots, y_n\right) \in \mathbb{R}^n$ et $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. (a) Montrer que pour tous réels positifs α et $\beta, \alpha\beta \leqslant \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$.

   (b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|x_k y_k\right| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.

   On commencera par traiter le cas $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

2. (a) Établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|x_k + y_k\right|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \left|x_k + y_k\right|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} \left|y_k\right| \cdot \left|x_k + y_k\right|^{p-1}$.

   (b) En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.