

## Notion de rang.

		<b>3 Niveau 2 : Rang et bijection.</b>	<b>3</b>
<b>1 Définitions.</b>	<b>1</b>	<b>4 Niveau 3 : Matrices équivalentes.</b>	<b>4</b>
		<b>5 Niveau 4 : Extraction.</b>	<b>5</b>
<b>2 Niveau 1 : Calculer un rang.</b>	<b>2</b>	<b>6 Exercices</b>	<b>6</b>

## 1 Définitions.

### Définition 1. Notion de rang

> **Rang d'une famille de vecteur.** On considère des vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ .

Le rang de la famille, noté  $rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ , c'est le nombre

$$rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \dim \left[ \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \right]$$

> **Définition du rang d'une matrice.** On considère une matrice  $A$  et on note  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p$  les vecteurs colonnes de  $A$ , on a donc  $A = (\vec{C}_1 \mid \vec{C}_2 \mid \dots \mid \vec{C}_p)$

le rang de la matrice  $A$ , noté  $rg(A)$ , c'est le nombre

$$rg(A) = rg(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p) = \dim \left[ \text{vect}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p) \right]$$

> **Définition du rang d'un morphisme.** On considère  $f$  un morphisme de  $E$  à valeurs dans  $F$ .

Le rang de la fonction  $f$ , noté  $rg(f)$ , c'est le nombre.

$$rg(f) = \dim \left[ \text{Im} f \right]$$

Conséquence : la formule  $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im} f) = \dim \mathcal{D}_{\text{épart}}$  devient

$$\text{Le théorème du rang : } \dim(\ker f) + rg(f) = \dim \mathcal{D}_{\text{épart}}$$

### Théorème 2.

Les trois notions de rang sont liées, en effet on a

On note  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $\mathcal{D}_{\text{épart}}$  et  $A = \text{Mat}(f)$  ainsi

$$\underbrace{rg(f)}_{\text{morphisme}} = \underbrace{rg(A)}_{\text{matrice}} = \underbrace{rg(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_1))}_{\text{vecteur}}$$

## 2 Niveau 1 : Calculer un rang.

On d'abord les résultats simples suivant

### Théorème 3. Propriétés élémentaires

> Soit  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  une famille de  $p$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$

alors  $rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \leq \min(p, n)$  et Si la famille est une base

Alors  $rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = p = n$

> Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times p$

Alors  $rg(A) \leq \min(n, p)$  et Si la matrice est inversible

Alors  $p = n = rg(A)$

> Soit  $\phi$  un morphisme de  $E$  à valeurs dans  $F$ .

Alors  $rg(\phi) \leq \min(\dim E, \dim F)$

et Si la fonction  $\phi$  est bijective alors  $\dim F = \dim E = rg(A)$

Démonstration :

On sait que  $rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \dim(\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p))$

> D'une part : Les  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^n$  donc  $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \subset \mathbb{R}^n$ , donc  $rg = \dim(\text{vect}) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$

> D'autre part :  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  est une famille génératrice du vect donc  $rg = \dim(\text{vect}) \leq p$

De plus Si la famille est libre alors  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  est une base du vect et donc  $rg = \dim(\text{vect}) = p$

Les autres énoncés se font de la même façon.

### Théorème 4. Rang et algorithme du pivot de Gauss

On considère des vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ . On fait Gauss sur ces vecteurs, ainsi

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \xrightarrow{\text{Gauss}} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r, \vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0})$$

Alors  $rg(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \text{card}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r) = r$

Démonstration : A l'issue du l'algorithme de Gauss, on sait que la famille  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  est une famille en escalier donc libre.

De plus on sait que  $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = \text{vect}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r)$

Conclusion :  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r)$  est une base du vect, ainsi  $rg = r$

**Exemple 1 :** On va calculer  $rg(A)$  en faisant Gauss sur les vecteurs colonnes de la matrice  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - C_1 \curvearrowright C_4 \\ C_4 - C_1 \curvearrowright C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 + C_2 \curvearrowright C_4 \\ C_4 + C_2 \curvearrowright C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - C_3 \curvearrowright C_4 \\ C_4 - C_3 \curvearrowright C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $rg(A) = 3$

**Exemple 2 :** On reprend la matrice  $A$ . On va calculer  $rg(A)$  en faisant un raisonnement.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \vec{C}_3 | \vec{C}_4)$$

> Comme  $\det(\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \vec{C}_3 | \vec{C}_4) = \dots = 0$ , on a  $rg(A) \leq 3$

> Comme  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$  sont en escalier, on a  $rg(A) \geq 3$

Conclusion :  $rg(A) = 3$

### 3 Niveau 2 : Rang et bijection.

**Théorème 5. Rang et bijection**

> Soit  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  et  $f$  est un morphisme bijective

$$\text{On a alors } \text{rg} \left( f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p) \right) = \text{rg} \left( \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \right)$$

> Soit une matrice  $A$  et  $P, Q$  sont 2 matrices inversibles.

$$\text{On a alors } \text{rg}(PA) = \text{rg}(A) \text{ et } \text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$$

Remarque : la matrice  $A$  n'est pas forcément carrée par contre  $P, Q$  sont des matrices carrées (car inversibles) et de taille compatible.

Application : Deux matrices  $A, A'$  semblables, càd  $A = PA'P^{-1}$ , on le même rang

Démonstration : Démonstration de la première égalité.

On considère  $f_R$  la restriction de  $f$  à  $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \subset E$ .

Il est clair que  $f_R$  est un morphisme avec  $\mathcal{D}_{\text{épart}} = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$  et  $\text{Im}(f_R) = \text{vect}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$ .

$$\text{On a } \vec{u} \in \ker(f_R) \iff \vec{u} \in \mathcal{D}_{\text{épart}} \text{ et } f(\vec{u}) = \vec{0} .$$

$$\iff \vec{u} \in \mathcal{D} \cap \ker(f)$$

Or  $f$  est bijective donc  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$  ainsi  $\vec{u} = \vec{0}$ .

$$\text{Conclusion : } \ker(f_R) = \vec{0}$$

Avec le théorème du rang, on a donc  $\dim(\mathcal{D}_{\text{épart}}) = \dim(\text{Im}(f_R))$

Démonstration : Démonstration de la deuxième égalité.

> Pour  $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$ .

On note  $A = (\vec{C}_1 \mid \vec{C}_2 \mid \dots \mid \vec{C}_p)$ , on a alors

$$PA \text{ est la matrice } (P\vec{C}_1 \mid P\vec{C}_2 \mid \dots \mid P\vec{C}_p)$$

Comme  $P$  est inversible, la fonction  $h_P : \vec{U} \mapsto P\vec{U}$  est bijective.

Et on applique l'égalité précédente avec  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p$  et  $P\vec{C}_1, P\vec{C}_2, \dots, P\vec{C}_p$ .

> Pour  $\text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$ .

On note  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots)$  la base classique de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

Comme  $Q$  est inversible, on a  $(Q\vec{E}_1, Q\vec{E}_2, \dots)$  est une autre base de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

On considère la fonction  $h_A : \vec{U} \mapsto A\vec{U}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \text{Im}[A] &= \text{vect}(\text{l'image d'UNE base}) \\ &= \text{vect}(A\vec{E}_1, A\vec{E}_2, \dots) \text{ Ici on a choisi la base } (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots) \\ &= \text{vect}(AQ\vec{E}_1, AQ\vec{E}_2, \dots) \text{ Ici on a choisi la base } (Q\vec{E}_1, Q\vec{E}_2, \dots) \end{aligned}$$

Comme  $\text{vect}(\dots) = \text{vect}(\dots)$ , on a bien  $\text{rg}(\dots) = \text{rg}(\dots)$

## 4 Niveau 3 : Matrices équivalentes.

### Définition 6. Matrices équivalentes

Soit  $A$  et  $A'$  deux matrices.

On dit que les matrices  $A$  et  $A'$  sont équivalentes

Ssi il existe deux matrices **inversibles**  $P, Q$  telle que  $A = PA'Q$

Remarque : Le théorème précédent assure que : *lorsque  $A$  et  $A'$  sont équivalentes, alors  $rg(A) = rg(A')$*

### Théorème 7. Matrices équivalentes et rang

Soit  $A$  et  $A'$  deux matrices. On a équivalence entre

(i)  $rg(A) = r$

(ii) la matrice  $A$  est équivalente à la matrice par bloc  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , CàD  $A = PJ_rQ$

Conséquence :  $rg(A^T) = rg(A)$

Démonstration : Le sens (ii)  $\implies$  (i) est compte tenu de la remarque de la définition.

(i)  $\implies$  (ii)

On considère la fonction  $[h_A : \vec{U} \mapsto A\vec{U}]$ . Ainsi  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(h_A)$ .

La démonstration consiste à construire des bases *finaudes* pour  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  puis à écrire la formule de changement de base.

> Pour  $\mathcal{D}$ , je choisis une base  $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_p$  du noyau de  $h_A$  que je complète avec  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r$ . Ainsi on a une base  $\mathcal{B}'$

> Pour  $\mathcal{A}$ . Avec le théorème du rang, on a que la famille  $A(\vec{e}_1), \dots, A(\vec{e}_r)$  est libre et je la complète en une base  $\mathcal{C}'$

Avec les formules de changement de base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(h_A) = \text{Mat}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'). \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(h_A) \text{Mat}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$$

Je note  $P = \text{Mat}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$ ,  $Q = \text{Mat}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$ .

Enfin avec les décorations, on vérifie que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(h_A) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Application 1.

On suppose que  $rg(A) = r$ , on peut écrire avec le théorème précédent

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \\ \implies A^T &= Q^T \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T \end{aligned}$$

Comme  $P$  est inversible, on sait que la transposée  $P^T$  est inversible et donc  $A^T$  est équivalente à  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et on applique la remarque de la définition donc  $rg(A^T) = rg(A)$

### Exemple d'utilisation du théorème.

On suppose que  $A$  est une matrice et que  $rg(A)$

Ainsi il existe  $P$  et  $Q$  inversibles tel que  $A = PJ_1Q$

$$\text{Comme } J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (10\dots 0) = C.L$$

Conclusion :  $A = PC.LQ = (PC).(LQ) = \text{Colonne} \times \text{Ligne}$

## 5 Niveau 4 : Extraction.

### Définition 8. Matrice extraite

On considère une matrice  $A$ .

Je choisis des lignes et des colonnes.

je fabrique une nouvelle matrice "plus petite" en concevant uniquement les coefficients à l'intersection de ces lignes et ces colonnes j'obtiens ainsi une matrice extraite.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{je choisis les lignes L1, L3 et les colonnes C1, C3, C4}} \text{Ainsi } A' = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 8 \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 5 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Je choisis les lignes L1, L2 et les colonnes C2, C4}} \text{Ainsi } A' = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 8 \\ * & 3 & * & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

### Théorème 9. rang et extraction

Soit une matrice  $A$ . On en extrait une matrice  $A'$

Alors : Quand on extrait, Le rang diminue

$$\text{CàD } rg(A') \leq rg(A)$$

Complément : On suppose que  $rg(A) = r$ , alors

> Toutes les matrices carrées extraites de taille  $p \geq r + 1$  sont non-inversibles et donc leur déterminant est égale à 0.

> Il existe une matrice extraite carré de taille  $r$  "optimale", noté  $A_{op}$  qui est inversible et donc  $\det(A_{op}) \neq 0$ .

Démonstration : On considère une matrice  $A$  et on note  $A = (\vec{C}_1 | \vec{C}_2 | \dots | \vec{C}_p)$ .

- Je choisis des colonnes consiste à garder seulement quelques vecteurs parmi  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p$ .

Donc on a forcément  $vect(extrait) \subset vect(initial)$ . Donc  $rg(\dots) \leq rg(\dots)$

- Maintenant on transpose (et cela ne change pas le rang) donc les lignes et les colonnes sont échangées puis on reprend le raisonnement précédent.

Démonstration du complément.

> Dans la matrice extraite, on a le nombre de vecteurs colonnes est  $= p \geq r + 1 > r = rg(A) = \dim(vect)$  donc les vecteurs colonnes sont liés ainsi  $\det=0$ .

> On reprend le raisonnement du théorème mais on ne choisit pas au hasard les colonnes que l'on garde mais on prend celles fournies par le théorème de la base extraite. Comme  $rg(A) = r$ , il ne reste que  $r$  colonnes et  $r$  lignes.

Fini  $\square$

## 6 Exercices

**Exercice 1.** Calculer le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  avec  $E$  de dimension finie. Montrer les inégalités :

$$> \dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$$

$$> \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g)$$

$$> \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(E) \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$