Fonctions de deux variables.

1 Le programme officiel 1

2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ 2

3 fonctions continues, $\mathscr{C}^1$ 2
- 3.1 Fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ 2
- 3.2 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. 4
- 3.3 Dérivées partielles en un point, $\mathscr{C}^1$ 5

4 Exemple : CCP numéro 57 6

5 Développement limité et Gradient 8
- 5.1 Développement limité 8
- 5.2 Gradient 9

6 Dérivées selon un vecteur et composées 10
- 6.1 Dérivées selon un vecteur 10
- 6.2 Règle de la chaîne 11

7 Extremums 12

1 Le programme officiel

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables.
Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts.

Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeur dans $\mathbb{R}$.

Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.
La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel.
L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. *L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.*

Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.

Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.

Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0,y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+o\Big(\|(h,k)\|\Big).$$

Démonstration hors programme.
On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ et l'interprétation de $z-z_0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ comme équation du plan tangent en (x_0,y_0) à la surface d'équation $z=f(x,y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Notation $\nabla f(x_0,y_0)$.
Expression du développement limité à l'aide du gradient.
Le gradient de f en (x_0,y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Dérivée selon un vecteur.

Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0,y_0),u\rangle$.

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t\mapsto f\Big(x(t),y(t)\Big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t),y(t))\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$$

Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ et expression à l'aide du gradient

$$(f\circ\gamma)'(t)=\langle \nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t),y'(t))$.
Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u,v)\mapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$.

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.

2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Contexte

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

> du produit scalaire $< \odot, \odot >$ classique

> de sa norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{<\vec{u},\vec{u}>} = \sqrt{x^2+y^2}$

> de la BON canonique $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$

$$\text{Lorsque } \vec{\delta} = (h,k), \text{ on a } r = \left\|\vec{\delta}\right\| = \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$$

Définition 1. Ouvert du plan

Boule ouverte, fermé : On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne classique, CàD celle du lycée.

> On appelle boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$, l'ensemble $B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ tq \ \|x-a\| \underset{stric}{<} r\right\}$

$$\text{Ainsi on a } x \in B(a,r) \iff \|x-a\| < r \iff \text{distance entre } x \text{ et } a \text{ est } < r$$

> On appelle boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$, l'ensemble $\overline{B(a,r)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ tq \ \|x-a\| \leqslant r\right\}$

$$\text{Ainsi on a } x \in \overline{B(a,r)} \iff \|x-a\| \leqslant r \iff \text{distance entre } x \text{ et } a \text{ est } \leqslant r$$

Remarque : Boule fermé = boule ouverte ∪ la sphère

Ouverts du plan

Une partie U du plan est dite ouverte Ssi

$$\forall a \in U, \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } B(a,r) \subset U$$

Exemples

> Les boules ouvertes sont des ouverts du plan (mais pas les boules fermées ni les cercles)

> $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts du plan

> Les intervalles $]a,a'[$ ou $]b,b'[$ ne sont pas des ouverts du plan,
par contre l'ensemble produit $]a,a'[\times]b,b'[$ est un ouvert du plan.

3 fonctions continues, $\mathscr{C}^1$

3.1 Fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ est une fonction avec $f(x) \in \mathbb{R}$
on sait que son graphe c'est l'ensemble/la courbe $\left\{\left(x, f(x)\right) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \in \mathscr{D}_f\right\}$. On le note traditionnellement $y = f(x)$

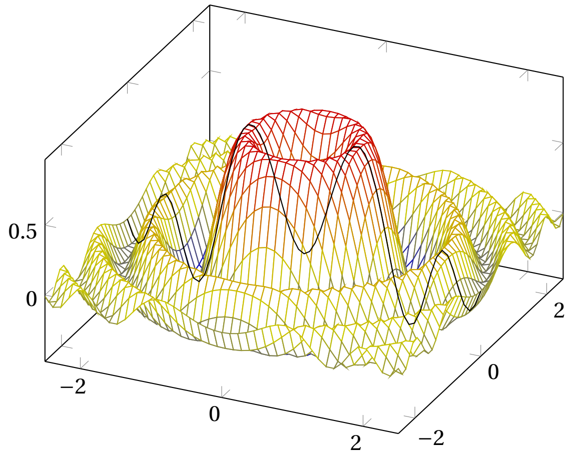
Soit $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ est une fonction avec $f(x,y) \in \mathbb{R}$

alors son graphe c'est l'ensemble, la surface $\{(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{=z}) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \in \mathscr{D}_f\}$

On le note traditionnellement $z = f(x,y)$

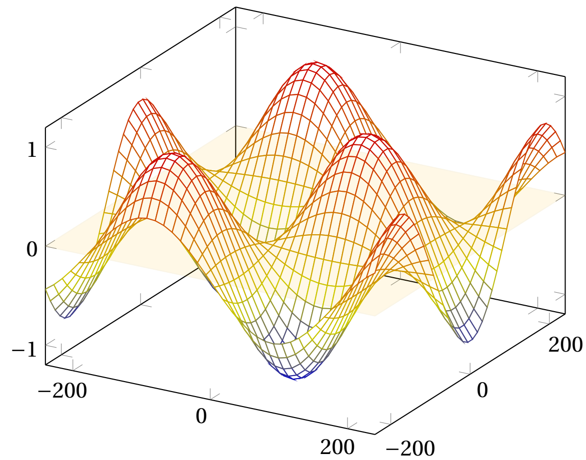
Graphe sur $]-2,2[\times]-2,2[$ de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{\sin(2\,r^2)}{\sqrt{1+r^2}}$$



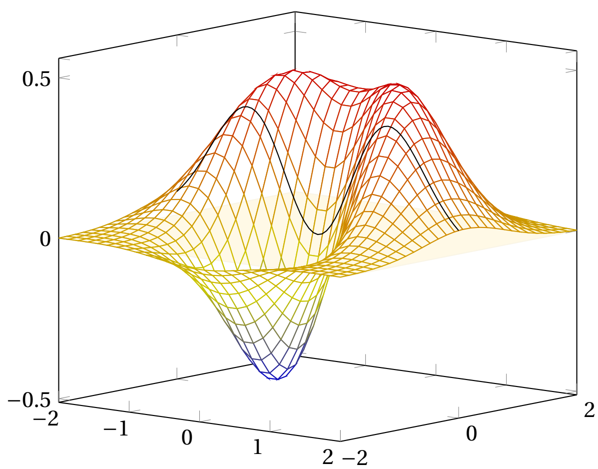
Graphe de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \sin(x)\,\cos(y)$$



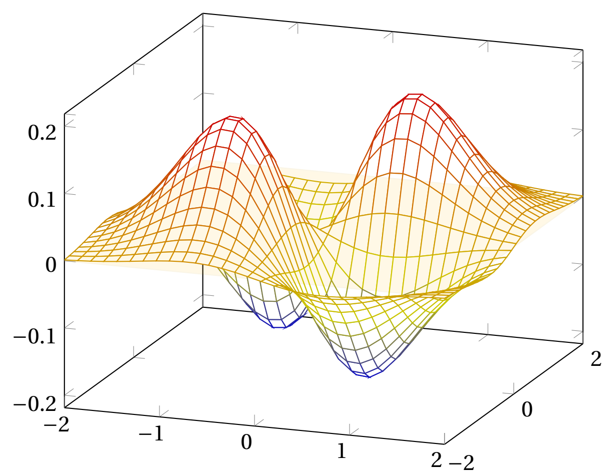
Graphe sur $]-2,2[\times]-2,2[$ de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto (x^2+y)e^{-x^2-y^2}$$



Graphe sur $]-2,2[\times]-2,2[$ de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto x\,y\,e^{-x^2-y^2}$$



3.2 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On sait que la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ est continue en a Ssi le nombre $f(x)$ se rapproche de $f(a)$ quand x se rapproche de a.

Ici "se rapproche" est mesuré par la distance entre x et a, CàD $|x-a| \leqslant \eta \iff x \in [a-\eta, a+\eta]$,

d'où la définition

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) \iff \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \\ \quad \forall x \; tq \; x \in [a-\eta, a+\eta] \implies f(x) \in [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon] \end{array} \right.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \\ \quad \forall x \; tq \; |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

Suivant la même approche, on a

La fonction $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ est continue en (a,b) Ssi le nombre $f(x,y)$ se rapproche de $f(a,b)$ quand (x,y) se rapproche de (a,b).

Ici "se rapproche" est mesuré par la distance entre (x,y) et (a,b),

CàD $\left\|(x,y)-(a,b)\right\| \leqslant \eta \iff (x,y) \in \underbrace{B\Big((a,b),\eta\Big)}_{\textit{La boule de centre } (a,b) \textit{ et de rayon } \eta}$,

d'où la définition

Définition 2. Continuité de f en (a,b)

Soit $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction définie sur un ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$

Soit $(a,b) \in A$ un point de A

$$f(x,y) \longrightarrow f(a,b) \iff \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \\ \quad \forall x \; tq \; (x,y) \in B_{oule}\Big((a,b),\eta\Big) \implies f(x,y) \in B_{oule}\Big(f(a,b),\varepsilon\Big) \end{array} \right.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \\ \quad \forall x \; tq \; \left\|(x,y)-(a,b)\right\| \leqslant \eta \implies \left\|f(x,y)-f(a,b)\right\| \leqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

Théorème 3. Continuité des fonctions

Soit $f : \vec{u} = (x,y) \longmapsto f\left(\vec{u}\right) = f(x,y)$ une fonction définie sur un ouvert $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a,b) \in \mathscr{D}$ un vecteur/point de $\mathscr{D}$

On note $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ avec $r = \left\|\vec{\delta}\right\| = \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$

La fonction f est continue en $\vec{A} = (a,b)$

$$\text{Ssi } f(x,y) = f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{A}+\vec{\delta}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}\right) \underset{r\to 0}{=} f(a,b)$$

Application :

Sur leur ensemble de définition, les fonctions usuelles

$$\left.\begin{array}{c} (x,y) \longmapsto x \\ (x,y) \longmapsto y \\ (x,y) \longmapsto x+y \\ (x,y) \longmapsto xy \\ (x,y) \longmapsto x/y \end{array}\right\} \textit{sont continues (et même } \mathscr{C}^\infty\textit{)}$$

De plus les sommes, produits, quotient, composée de fonction continues sont continues

ainsi $(x,y) \longmapsto x^y = e^{y\ln(x)}$ est continue sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Conclusion Les fonctions fabriquées à partir des fonctions usuelles et avec les opérations classiques

sont continues et même $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition

3.3 Dérivées partielles en un point, $\mathscr{C}^1$

Définition 4. Dérivées partielles en un point

Soit f un e fonction définie sur un ouvert U

Soit (a,b) un point de U

Les *fonctions partielles* en (a,b) sont les fonctions f_1 et f_2 définies par

$f_1 : x \longmapsto f(x,b)$ et $f_2 : y \longmapsto f(a,y)$

> On dit que la fonction f est dérivable au point (a,b) par rapport à sa première variable si la fonction partielle $f_1 : x \longrightarrow f(x,b)$ est dérivable en a. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

De même on définit $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_2'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

Avec les notations et les conventions de l'année, on a

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left[f(x,y)\right]$ CàD on fixe y et on dérive par rapport à x.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left[f(x,y)\right]$ CàD on fixe x et on dérive par rapport à y.

> On dit qu'une fonction $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U

Ssi en tout point, la fonction f est continue et les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues

> `Contre exemple :`

Soit la fonction $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & Si\ (x,y) \neq (0,0) \\ = 0 & Si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles en tous points de $\mathbb{R}^2$

Et pourtant la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$

4 Exemple : CCP numéro 57

Exercice 1. [Correction] **CCP numéro 57**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

La fonction f est continue en $(0,0) \iff \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0$.

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \Big[\|(x,y)-(0,0)\|<\alpha \implies |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon\Big]$$

Ici $\|(x,y)-(0,0)\| = \textit{distance} = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».

La fonction f est différentiable en $(0,0) \iff \exists a,b\in\mathbb{R}$

$$\textit{tq au voisinage de } (0,0),\ f(x,y)=f(0,0)+ax+by+o\Big(\|(x,y)\|\Big).$$

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

> Les fonction $(x,y)\longmapsto x^2+y^2$ et $(x,y)\longmapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
et $(x,y)\longmapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

> Continuité en $(0,0)$?

On a

$$\begin{aligned}\big|f(x,y)-0\big| &= \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\\ &= \left|r\cos(\theta)r\sin(\theta)\frac{r^2\cos^2(\theta)-r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}\right|\end{aligned}$$

On passe en polaire, CàD $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$

$$\begin{aligned}&= r^2\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\left[\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right]\right|\\ &\leqslant r^2\underbrace{|\cos(\theta)|}_{\leqslant 1}\underbrace{|\sin(\theta)|}_{\leqslant 1}\underbrace{\left[\left|\cos^2(\theta)\right|+\left|\sin^2(\theta)\right|\right]}_{=1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\big|f(x,y)-0\big|\leqslant r^2$

On a bien avec le théorème de la distance $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

» La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et en $(0,0)$

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On sait que : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

On va faire proprement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

> Lorsque $(x, y) \neq (0,0)$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{d}{dx}\left[xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

C'est une fonction usuelle ....donc continue.

> Dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe ?

Comme $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

> Dérivée partielle par rapport à x est continue $(0,0)$?

On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0\right|$

On passe en polaire, CàD $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$

$= r\left|\cos^4(\theta)\sin(\theta) + 4\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) - \sin^5(\theta)\right|$

$\leqslant r\left[|\cos(\theta)|^4|\sin(\theta)| + 4|\cos(\theta)|^2|\sin(\theta)|^3 + |\sin(\theta)|^5\right]$

$\leqslant r\ [1+4+1] = 6.r$

On a bien avec le théorème de la distance $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$,

CàD $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

Conclusion : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$,

donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5 Développement limité et Gradient

5.1 Développement limité

Définition 5. Notion de $o\left(\|(h,k)\|\right)$

On sait que $\left\|\vec{\delta}\right\| = \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} = \sqrt{r^2} = r$

On dit que $Truc = o\Big(\|(h,k)\|\Big) = o(r)$ Ssi $\dfrac{Truc}{\|(h,k)\|} = \dfrac{Truc}{r} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$

On dit que $Truc = \mathcal{O}\Big(\|(h,k)\|\Big) = \mathcal{O}(r)$ Ssi $\dfrac{Truc}{\|(h,k)\|} = \dfrac{Truc}{r}$ est bornée.

Application On a quand $(h,k) \longrightarrow (0,0)$ ou $r \longrightarrow 0$

> $o(h)$ et $o(k)$ sont des $o\left(\left\|\vec{\delta}\right\|\right) = o\Big(\|(h,k)\|\Big) = o(r)$

> $o(h^2)$, $o(k^2)$ et $o(hk)$ sont des $o\left(\left\|\vec{\delta}\right\|^2\right) = o\Big(\|(h,k)\|^2\Big) = o(r^2)$

> $o(h^3)$, $o(h^2k)$, $o(hk^2)$ et $o(k^3)$ sont des $o\left(\left\|\vec{\delta}\right\|^3\right) = o\Big(\|(h,k)\|^3\Big) = o(r^3)$

Exemple : On suppose que $(h,k) \longrightarrow (0,0)$ et/ou/CàD $r \longrightarrow 0$

> Ordre 1. $h, k = \mathcal{O}(r)$ et aussi $h, k = o(1)$

> Ordre 2. $h^2, k^2, h.k = \mathcal{O}(r^2)$ et aussi $= o(r)$

> Ordre 3. $h^3, k^3, h^2.k, h.k^2 = \mathcal{O}(r^3)$ et aussi $= o(r^2)$

Théorème 6. Développement limité de $f(x,y)$ **au point** (a,b)

> Version pratique :

$$f(x,y) = \sqrt{1+xy} = \sqrt{1+2+2h+k+hk} = \underbrace{\qquad}_{Ordre\ 0} + \underbrace{\qquad}_{Ordre\ 1} + \underbrace{\qquad}_{Ordre\ 2} + \mathcal{O}(r^3)$$

> Version théorique (Taylor-Young). Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et $(a,b) \in U$

Alors f admet un développement limité en (a,b) de la forme

$$f(a+h,b+k) = \underbrace{\underbrace{f(a,b)}_{Ordre\ 0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k}_{Ordre\ 1}}_{eq\ du\ plan\ tangent} + \underbrace{o(\|(h,k)\|)}_{=o(r)}$$

Exemple et interprétation en terme de plan tangente.

On considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1+xy}$ et $(a,b) = (1,2)$

On trouve que

$$\begin{aligned}
f(a+h,b+k) = f\Big(1+h, 2+k\Big) &= \sqrt{1+(1+h)(2+k)} \\
&= \sqrt{1+2+2h+k+hk} \\
&= \sqrt{3+\square} \qquad avec\, \square = 2h+k+hk \\
&= \sqrt{3}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\square}{\sqrt{3}} + o(\square)\right] \\
&= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(2h+k+hk) + o(r) \qquad avec\ r = \sqrt{h^2+k^2} \\
&= \underbrace{\underbrace{\sqrt{3}}_{=f(1,2)} + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \frac{1}{2\sqrt{3}}k}_{eq\ du\ plan\ tangent} + o(r)
\end{aligned}$$

Conclusion : La surface "graphe" f admet en $(1,2)$ un plan tangent d'équation

$$z = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \frac{1}{2\sqrt{3}}k = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(y-2)$$

De plus on constate que

> $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{1+xy}\right] = \dfrac{y}{2\sqrt{1+xy}}$.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \dfrac{2}{2\sqrt{1+1.2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

> $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{d}{dy}\left[\sqrt{1+xy}\right] = \dfrac{x}{2\sqrt{1+xy}}$.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+1.2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

On a bien $z = \sqrt{3} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}(x-1) + \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}_{=\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}(x-2)$

5.2 Gradient

L'exemple précédent assure que : $f\left(1+h, 2+k\right) = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}h + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}k + o(r)$ avec $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1+xy}$

On note $\overrightarrow{OM_0} = (1,2)$ et $\overrightarrow{\delta} = (h,k)$.
On a alors

$$\begin{aligned} f\left(1+h,2+k\right) = f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) &= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \frac{1}{2\sqrt{3}}k + o(r) \\ &= f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(r) \\ &= f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) + \left\langle \overrightarrow{grad}_{(1,2)}(f), \overrightarrow{\delta} \right\rangle + o(r) \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{grad}_{(1,2)}(f)$ Le gradient de la fonction $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1+xy}$ au point $(1,2) \in U$ est égale à $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Définition 7. Gradient d'une fonction

Soit $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur U
On appelle gradient de f au point (a,b), noté $\overrightarrow{grad}_{(a,b)}(f)$ ou $\nabla f(a,b)$ le vecteur

$$\overrightarrow{grad}_{(a,b)}(f) = \nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

Théorème 8. Propriétés du gradient

Soit $\overrightarrow{OM_0} = (a,b)$ et $\overrightarrow{\delta} = (h,k)$. On note $\nabla f(a,b)$ le gradient de f en (a,b).
L'interprétation de l'exemple ci-dessus assure que

$$f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) = f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) + \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \overrightarrow{\delta} \right\rangle + o\left(\left\|\overrightarrow{\delta}\right\|\right) \quad \text{avec } \left\|\overrightarrow{\delta}\right\| = \sqrt{h^2+k^2}$$

Application :

Le gradient de f en (a,b) indique la direction dans laquelle $f(x,y)$ (dé)croît le plus vite.

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Démonstration : On a $f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) \sim \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \overrightarrow{\delta} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{grad}_{M_0} f\right\| \left\|\overrightarrow{\delta}\right\| \cos(\theta)$

Ainsi on a $f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) \sim K_\theta \left\|\overrightarrow{\delta}\right\|$ avec θ l'angle entre $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{\delta}$

Ainsi la variation $f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)$ est mesuré par θ l'angle entre $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{\delta}$

> Lorsque $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{\delta}$ sont colinéaires, alors la variation de $f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)$ est la plus rapide.
le gradient de f en (a,b) indique la direction dans laquelle $f(x,y)$ (dé)croît le plus vite.

> Lorsque $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{\delta}$ sont orthogonaux, alors la variation de $f\left(\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{\delta}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) = o(r)$, CàD est nulle à l'ordre 1
ainsi le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

6 Dérivées selon un vecteur et composées

6.1 Dérivées selon un vecteur

Définition 9. Dérivées selon un vecteur

Soit $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert U et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur

On dit que la fonction f est dérivable en $M_0 = (a, b)$ dans la direction $\vec{v}$

$$\text{Ssi la limite } \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{OM_0} + t\vec{v}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)}{t} \text{ existe et est finie.}$$

On la note alors $D_{\vec{v}} f\,(\overrightarrow{OM_0})$

Théorème Lorsque f est $\mathscr{C}^1$ sur U,

alors pour tout M_0, pour tout $\vec{v}$, la dérivée directionnelle $D_{\vec{v}} f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)$ existe et on a

$$D_{\vec{v}} f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) = \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0} f, \vec{v} \right\rangle = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \right\rangle$$

Démonstration : La démonstration du théorème est facile car f est $\mathscr{C}^1$

donc elle admet le DL $f\left(\overrightarrow{OM_0} + \vec{\delta}\right) = f\left(\overrightarrow{OM_0}\right) + \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \vec{\delta} \right\rangle + o\left(\left\|\vec{\delta}\right\|\right)$ qui va permettre de calculer la limite

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(\overrightarrow{OM_0} + t\vec{v}\right) - f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)}{t} &= \frac{\left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), t\vec{v} \right\rangle + o(r)}{t} \\
&\quad avec \left\| t\vec{\delta} \right\| = K_{onstante}\, t \\
&= \frac{t\left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \vec{v} \right\rangle + o(t)}{t} \\
&= \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \vec{v} \right\rangle + o(1) \longrightarrow \left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0}(f), \vec{v} \right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi $D_{\vec{v}} f\left(\overrightarrow{OM_0}\right)$ existe et vaut $\left\langle \overrightarrow{grad}_{M_0} f, \vec{v} \right\rangle$

6.2 Règle de la chaîne

`Contexte`

Soit $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert U et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $x : t \longmapsto x(t)$ et $y : t \longmapsto y(t)$ deux fonctions définies sur I telle que pour out $t \in I$, on ait $\Big(x(t), y(t)\Big) \in U$

Alors la fonction $F : t \longmapsto f\Big(x(t), y(t)\Big)$ est bien définie

et c'est une fonction *numérique*, Càd de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 10. Règle de la chaîne

On suppose que les fonctions $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$, $x : t \longmapsto x(t)$ et $y : t \longmapsto y(t)$ sont $\mathscr{C}^1$,

Alors la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\Big(x(t), y(t)\Big)\right] &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(t), y(t)\Big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(t), y(t)\Big)\, y'(t) \\
&= \left\langle \overrightarrow{grad}_{(x(t),y(t))} f, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{grad}_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \right\rangle \qquad avec\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\ et\ \gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Démonstration : On doit démontrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\Big(x(t_0 + h), y(t_0 + h)\Big) - f\Big(x(t_0), y(t_0)\Big)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(t_0), y(t_0)\Big)\, x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(t_0), y(t_0)\Big)\, y'(t_0)$$

Comme les fonction f, x, y sont $\mathscr{C}^1$

donc elles admettent des DL et cela va permettre de calculer la limite

`Je vous laisse faire le DL !!`

`Contexte`

Soit $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert U et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $u : (x, y) \longmapsto u(x, y)$ et $v : (x, y) \longmapsto v(x, y)$ deux fonctions définies sur R^2 telle que pour out $t \in I$, on ait $\Big(u(x, y), v(x, y)\Big) \in U$

Alors la fonction $F : (x, y) \longmapsto f\Big(u(x, y), v(x, y)\Big)$ est bien définie

et c'est une fonction de U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 11. Généralisation

On suppose que les fonctions $f : (X, Y) \longmapsto f(X, Y)$, $u : (x, y) \longmapsto u(x, y)$ et $v : (x, y) \longmapsto v(x, y)$ sont $\mathscr{C}^1$,

Alors la fonction $F : (x, y) \longmapsto f\Big(u(x, y), v(x, y)\Big)$ est $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial Y}$$

Démonstration : À faire avec un gros, gros DL

7 Extremums

Définition 12. Extremum, Point critique

> Maximum et minimum

On dit que $f : (x, y) \longmapsto f\left(x, y\right)$ admet un maximum (resp. un minimum) local en (a, b)
Ssi il existe un ouvert U de (a, b) tel que :

$$\forall (x, y) \in U, \; f(x, y) \leqslant f(a, b) \qquad \text{(resp. } f(x, y) \geqslant f(a, b)\text{)}$$

> Point critique

Soit $f : (x, y) \longmapsto f\left(x, y\right)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
On dit que (a, b) est un point critique de f Ssi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \iff \overrightarrow{grad}_{(a,b)} f = (0, 0)$$

Théorème 13.
Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.

Mais attention la réciproque est fausse

Démonstration :

Intuitivement, on a

Si le gradient n'est pas nul alors il indique la direction dans laquelle $f(x, y)$ (dé)croît le plus vite donc $f(a, b)$ n'est ni un maximum, ni un minimum. oups!

Rigoureusement

Comme f est $\mathscr{C}^1$, on sait que $\dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

On suppose que (a, b) est un maximum local

> Pour $h > 0$, on a $\dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leqslant 0$
donc à la limite que $h \longrightarrow 0^+$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \leqslant 0$

> Pour $h < 0$, on a $\dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \geqslant 0$
donc à la limite que $h \longrightarrow 0^+$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \geqslant 0$

Conclusion : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

Puis on fait pareil pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$