

Calculs algébriques.		2 Puissances/exponentielle.	2
1 Opérations "faciles"	1	2.1 Puissances	2
1.1 Addition, Soustraction, Mélange	1	2.2 Exponentielle et logarithme.	3
1.2 Produit	1	3 Factoriel et Coefficient du binôme.	4
1.3 Fraction	2	4 Exercices	5
1.4 Facteur	2		

1 Opérations "faciles"

1.1 Addition, Soustraction, Mélange

Soit a, b deux objets, CàD 2 nombres ou 2 complexes ou 2 vecteurs ou 2 matrices ou 2 polynômes ou 2 fonctions
Un mélange entre a, b c'est un objet de la forme

$2a - 3b$ ou $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$ ou $\sqrt{2}a - \sqrt{3}b$

les coefficients sont appelés les pondérations.

1.2 Produit

Définition 1. Le produit se distribue toujours sur l'addition

$\forall a, a', b, b' \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \text{ on a}$
 $a.(b + b') = a.b + a.b' \text{ et } (a + a').b = a.b + a'.b$

Conséquence

Zéro est absorbant, CàD $\forall a \in \mathbb{C}, a.0 = 0$ et $0.a = 0$

Démonstration : On suppose que $a \in \mathbb{R}$

On va montrer que $a.0 = 0$

- on va calculer $a.(a + 0)$
- D'une part $a.(a + 0) = a.a + a.0$ car le produit se distribue.
 - D'autre part $a.(a + 0) = a.a$ car $a + 0 = a$

Conclusion : $a.a + a.0 = a.a$
 $\implies a.0 = 0$ fini

On fait de même pour démontrer $0.a = 0$.
Cette démonstration n'utilise que les propriétés élémentaires de zéro et la distributivité, donc elle est valide dans tous les situations où il y a le mot produit, CàD avec des fonctions, des matrices, le produit scalaire ou le produit vectoriel.

1.3 Fraction

Théorème 2. Quelques propriétés qu'il est bon de rappeler

> *Quotient de fractions*

On sait que $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ et surtout

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a/1}{b/c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$$

> *Somme de fractions*

On sait que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\text{Haut}}{\text{Bas}} = \dots$,

Attention en pratique : La *Bas* n'est pas obligatoirement le plus gros possible.

1.4 Facteur

> *Un facteur, c'est quoi*

> *Recherche des facteurs.*

Même si au lycée personne ne parle des facteurs,
il faut rechercher les facteurs *et les garder*.

Et quand on a des facteurs, on les garde !

> *Kulture indispensable.*

La factorisation remarquable $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

2 Puissances/exponentielle.

2.1 Puissances

Définition 3. a^b le vicieux

Soit a un nombre entier/réel et b un nombre entier/réel.

> Lorsque $b = n$ est un entier positif, alors $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$

> Lorsque b est un entier/réel, alors $a^{-b} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^b}$

> Lorsque $n = 1/2$, alors $a^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a}$

> Lorsque $b = \text{bof}$, alors $a^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln(a)}$

Complément autour de 0^b , de a^0 et de 0^0 .

Lorsque $b \neq 0$, les définitions classiques donnent $0^b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$ Remarque : Aucune des définitions classiques ne s'appliquent.

Pour calculer 0^0 , on a un problème car Soit $0^0 = 0^b = 0$, Soit $0^0 = a^0 = 1$.

En algèbre, $0^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ en analyse, 0^0 n'existe pas c'est une FI.

Théorème 4. Les 6 formules autour de a^b .

> Kulture $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$

> Le Formulaire : 18h, 19h, 20h, 21h, 7h, 7h45

$$a^{b+c} = a^b a^c$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad \text{et/ou} \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$(ab)^c = a^c b^c$$

$$a^{b^c} \stackrel{\text{def}}{=} a^{(b^c)} = \text{Rien}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1$$

En particulier : $z^{2^n} = z^{(2^n)} \neq (z^2)^n = z^{2n}$ et $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$

Lorsque plusieurs formules sont utilisables pour calculer a^b , on obtient toujours le même résultat.

Remarque : Ca n'est pas "évident"

mais $2^2 = a^2 = a \times a = 4$ est bien égale à $2^2 = a^2 = e^{2\ln(a)} = e^{2\ln(2)} !!!$

Démonstration : *Un formulaire cela se démontre*

Comme une puissance entière est une succession de produit, le formulaire se démontre simplement en détaillant les produits

$$> a^2 \cdot a^3 = (a.a) \cdot (a.a.a) = a.a.a.a.a = a^5 = a^{2+3}$$

$$> a^2 \cdot a^{-3} = a^2 \cdot \frac{1}{a^3} = (a.a) \cdot \frac{1}{a.a.a} = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{2-3}$$

$$> (a.b)^3 = (a.b) \cdot (a.b) \cdot (a.b) = (a.a.a) \cdot (b.b.b) = a^3 \cdot b^3$$

$$> \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\text{Et enfin } (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \dots a^n}_{m \text{ fois}} = a^{n+n+\dots+n} = a^{n \cdot m}$$

2.2 Exponentielle et logarithme.

Théorème 5. Autour de exp / ln

Les formules de exp

Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad \text{et/ou} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{ab} = (e^a)^b$$

$$e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

Les formules de ln

Soit $a, b > 0$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \text{et/ou} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(\square^a) = a \ln \square$$

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1$$

$$\forall x > 0, \quad \frac{d}{dx} [\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x, \quad \forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$$

4 Exercices

Manipuler

Exercice 1. [Correction]

1. Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1), \quad (x^2 + x + 1)^2, \quad (2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1)$$

2. Factoriser les expressions polynomiales suivantes.

$$(a) \quad -(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$$

$$(b) \quad 25 - (10x + 3)^2$$

$$(c) \quad (6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$$

$$(d) \quad (-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$$

Exercice 2. les nombres $a, b \in \mathbb{C}$ sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas.

1. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{\text{Haut}}{\text{Bas}}$

$$A = \frac{1 - \frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a} - 1} \quad B = \frac{a + \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{a}} \quad C = \frac{\frac{a}{b} - 2}{\frac{b}{a} - \frac{1}{2}}$$

2. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{\text{Haut}}{\text{Bas}}$

$$A = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}$$

$$C = \frac{1}{a(a+1)^2} - \frac{1}{a^2(a+1)}$$

$$E = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2}$$

$$B = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}$$

$$D = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$

$$F = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a+1}$$

$$3. \text{ Simplifier : } \frac{e^{3x}}{e^x + e^{5x}} \text{ et } \frac{\frac{1}{x} + 1}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Exercice 3. On considère a, b deux complexes et n, m dans $\mathbb{Z}$.

Simplifier les complexes suivants. Les nombres a et b sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A = \frac{(a^n)^3 + (a^2)^n}{1 + a^n} \quad B = \frac{a^{n+m} \cdot (a \cdot b^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n \cdot (a \cdot b^m)^n} \quad C = (a^2)^n \cdot \frac{(1 + \frac{1}{b})^n}{(a + ab)^n}$$

Factoriel et Binôme

Exercice 4. [\[Correction\]](#)

1. Calculer ou simplifier

$$\frac{7!}{5!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$(n+2)! - 2(n+1)! + n!$$

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

2. On considère
- $n \in \mathbb{N}^*$
- et on suppose que
- $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Simplifier les expressions suivantes

$$A = (n+1)! - (n-2)!$$

$$B = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$C = \frac{n!}{(k+1)!} - \frac{(n+1)!}{k!}$$

$$D = (n-k)! - (n-k+1)!$$

Exercice 5. On considère $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer
- $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$
- ,

2. On suppose que
- $k \in \{1, 2, \dots, n\}$
- .

Calculer $\binom{n}{n-k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$

3. On suppose que
- $k \in \{1, 2, \dots, n\}$
- .

Calculer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$ **Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$ Simplifier $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ et à la fin mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\triangle}$

 Plus difficile

Exercice 7. [Correction] Pour les suites suivantes, simplifier puis donner le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$a_n = \frac{11^n}{n!} \quad b_n = \binom{2n}{n}$$

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on définit $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \geq 2, u_n = \frac{n+1}{2n}$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

Exercice 10. On considère les suites

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

Montrer que : $\Delta_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11. Soit la suite (F_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$

Calculer $(F_n)^2$. En déduire F_{n+1} en fonction de F_n .

Exercice 12. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1) - h(x)$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad g(x) = x(x+1)(2x+1) \quad H_n(x) = \frac{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}{n!}$$

Exercice 13. [Correction] Combien est ce qu'il y a zéro à la fin de $(1492)!$

Déterminer a le nombre de multiple de 5 entre 1 et 1492

Déterminer b le nombre de multiple de $5^2 = 25$ entre 1 et 1492

Déterminer c le nombre de multiple de $5^3 = 125$ entre 1 et 1492

Déterminer d le nombre de multiple de $5^4 = 625$ entre 1 et 1492

Déterminer e le nombre de multiple de $5^5 = 3125$ entre 1 et 1492

> Justifier que la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N = a + b + c + d$

> Justifie qu'il a N zéros à la fin de $(1492)!$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) &= X^4 + X^3[\] + X^2[\] + X^1[\] + X^0[1] \\ &= X^4 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1)^2 &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \\ &= X^4 + X^3[\] + X^2[\] + X^1[\] + X^0[1] \\ &= X^4 + 2X^3 + 3x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1) &= [10x^2 - x - 24] - [10x^2 - 22x + 4] \\ &= 21x - 28\end{aligned}$$

2.

(a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x-7] = -6(6x+7).$$

(b) On a $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

(c) On a $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64 = 2(3x-4)(10x+3)$

(d) On a $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64 = -8(x+1)(x+16)$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

$A =$ On factorise $(n-2)!$

$B =$ On factorise $\frac{1}{n!}$

$C =$ On factorise $\frac{n!}{k!}$

$D =$ On factorise $(n-k)!$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

> On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!} \left[\frac{11}{n+1} - 1 \right] = \frac{11^n}{n!} \left[\frac{11-n}{n+1} \right]$$

Donc $a_{n+1} - a_n < 0$ à partir du rang $N_0 = 11$

> On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n &= \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} - 1 \right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - 1 \right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)} \right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{3n+1}{(n+1)} \geq 0\end{aligned}$$

Donc pour tout n , $b_{n+1} - b_n \geq 0$.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

Comme $1492 = 298 \times 5 + 2$ donc il y a $a = 298$ de multiple de 5 entre 1 et 1492

Comme $1492 = 59 \times 25 + 17$ donc il y a $b = 59$ de multiple de $5^2 = 25$ entre 1 et 1492

Comme $1492 = 11 \times 125 + 117$ donc il y a $c = 11$ de multiple de $5^3 = 125$ entre 1 et 1492

Comme $1492 = 2 \times 625 + 242$ donc il y a $d = 2$ de multiple de $5^4 = 625$ entre 1 et 1492

Comme $1492 = 0 \times 3125 + 1492$ donc il y a $e = 0$ de multiple de $5^5 = 3125$ entre 1 et 1492

> Justifier que la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N = a + b + c + d$

Pour compter la multiplicité de 5 dans $(1492)!$, il faut compter une fois les multiples de 5, un deuxième fois les multiples de $5^2 = 25$, une troisième fois ceux de $5^3 = 625$,.....

Or les multiples de 25 sont aussi des multiples de 5, ils sont comptés

une fois avec a

une autre avec b

Conclusion : la multiplicité de 5 dans $(1492)!$ est égale à $N = a + b + c + d = 298 + 59 + 11 + 2 = 370$

> Justifie qu'il a N zéros à la fin de $(1492)!$

Le nombre de zéro à la fin de $(1492)!$, c'est la multiplicité de 10 dans $(1492)!$

Or $10 = 2 \times 5$. La multiplicité de 5, c'est 370, celle de 2 c'est bien plus (on peut la calculer avec la même méthode)

Conclusion : la multiplicité de 10 dans $(1492)!$ est égale à 370