
 Manipulation

Exercice 1.

Écrire le formulaire sur les puissances.

Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$$A = 2^{n+3}$$

$$B = 2^{2n+1}$$

$$C = 2^{-2n}$$

$$D = (-2)^{2n+3}$$

$$E = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}}$$

$$F = 2^{n+3} - 2^{2n}$$

$$G = 8^{2n}$$

Exercice 2. [Correction] Simplifier. Rappel : Avant de réduire au même dénominateur, on cherchera les facteurs

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} \quad \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} \quad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$$

Exercice 3. [Correction]

1. Soit n et k des entiers avec $0 \leq k < n$.

Simplifier $\Delta = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$ puis en déduire le signe de Δ

2. Soit n et k des entiers avec $0 \leq k < n$.

Simplifier $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ et mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\heartsuit}$

Exercice 4. [Correction]

Écrire le formulaire sur exp et ln

Montrer que les fonction suivantes sont impaires, CàD que $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad f(x) = \ln \left(\frac{2021 + x}{2021 - x} \right)$$

Exercice 5. [Correction] On note $u_n = \binom{2n}{n}$

Trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$

 Manipulation plus difficile

Exercice 6. On considère la suite $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$

Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis vérifier que : $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} &= \frac{n!}{2^{2n}} \left[\frac{n+1}{2^2} - 1 \right] \\ &= \frac{n!}{2^{2n}} \left[\frac{n-3}{2^2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{1}{n!} \left[1 + \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{2n(n+1)(n+2) + (n+2) + n}{2n(n+1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{(2n^3 + 6n^2 + 4n) + 2n + 2}{2n(n+1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2}{2n(n+1)(n+2)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} \\ &= \frac{n!}{n!} \frac{(k+1)!}{k!} \frac{(n-k-1)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{k+1}{n-k}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Soit n et k des entiers avec $0 \leq k < n$. Simplifier $\Delta = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$ puis en déduire le signe de Δ

$$\begin{aligned} \text{On a } \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} &= \text{On écrit la définition.} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n)!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \text{On factorise ce qui se factorise} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n-k} \right] \\ &= \text{On réduit au même dénominateur} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{(n-k) - (k+1)}{(n-k)(k+1)} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{n-2k-1}{(n-k)(k+1)} \right] \end{aligned}$$

Comme n et k des entiers avec $0 \leq k < n$, le signe de $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$ est celui de $(n-2k-1)$

> Si $n-2k-1 \geq 0 \iff k \leq \frac{n-1}{2}$, c'est positif

> Si $n-2k-1 \leq 0 \iff k \geq \frac{n-1}{2}$, c'est négatif

2. Soit n et k des entiers avec $0 \leq k < n$. Simplifier $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ et mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\heartsuit}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \text{On écrit la définition.} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{(n)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \text{On factorise ce qui se factorise} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \text{On réduit au même dénominateur} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{(k+1) + (n-k)}{(n-k)(k+1)} \right] \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \text{On identifie} \\ &= \frac{\square!}{\triangle! (\square - \triangle)!} = \binom{\square}{\triangle} \text{ Ici } \square = n+1 \text{ et } \triangle = k+1 \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Pour tout/chaque $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} \\
 &= \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\
 &= \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{\ominus(e^{2x} - 1)}{1 + e^{2x}} = -f(x)
 \end{aligned}$$

Pour tout/chaque $x \in \mathcal{D}$, on a

$$f(-x) = \ln \left(\frac{2021 - x}{2021 + x} \right)$$

Or on a la formule $\ln \left(\frac{1}{\square} \right) = -\ln(\square)$ CàD $\ln \left(\frac{Haut}{Bas} \right) = -\ln \left(\frac{Bas}{Haut} \right)$
--

$$= -\ln \left(\frac{2021 + x}{2021 - x} \right) = -f(x)$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On note $u_n = \binom{2n}{n}$. Trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned}
 \text{On a } u_{n+1} - u_n &= \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n)!}{(n)!(n)!}
 \end{aligned}$$

On cherche les facteurs

$$= \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} \left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} - 1 \right]$$

Astuce : $2n+2 = 2(n+1)$

$$= \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} \left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - 1 \right]$$

$$= \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} \left[\frac{(4n+2) - (n+1)}{(n+1)} \right] = \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} \left[\frac{3n+1}{(n+1)} \right]$$

Conclusion : Comme $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est toujours positif