

DM 2 complexe

Exercice 1. [Correction]

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique, et calculer partie réelle, partie imaginaire, module, conjugué.

$$A = \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad B = \frac{(2 + 3i)^2}{4 - 2i}$$

2. En revenant à la forme algébrique, résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $3z + (3 - i)\bar{z} = 1 - 2i$.

Exercice 2. Rappel : $\square^2 = \square.\bar{\square}$. Soit $u, v \in \mathbb{C}$.

Montrer que : $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 3. [Correction] Rappel : $\square = \sqrt{\square.\bar{\square}}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\left| \frac{2}{1 + it} - 1 \right|$

2. Géométriquement où se trouve le point M d'affixe $\frac{2}{1 + it}$

Exercice 4. [Correction] Soit u un complexe avec $u \neq 1$. Soit z un complexe avec $z \notin \mathbb{R}$.

$$\text{On veut montrer : } \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = A \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$$

$\Leftarrow$ On suppose $|u| = 1$

On va montrer que $A \in \mathbb{R}$

Pour conclure que $A \in \mathbb{R}$, on peut : Soit calculer $\text{Im}(A)$, soit vérifier $\bar{A} = A$ soit vérifier $\bar{A} - A = 0$
Choisir la méthode qui vous semble le mieux adapté et appliquer la.

$\Rightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

On doit montrer $|u| = 1$, CàD $\sqrt{u\bar{u}} = \dots = 1$.

Étape 1 : On exprime u en fonction de A . Étape 2 : On calcule $\sqrt{u\bar{u}}$.

Exercice 5. [Correction]

1. En utilisant $A \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(A) = 0$,
trouver tous les nombres complexes z tels que $A = (z - 2)(\bar{z} + i) \in \mathbb{R}$
2. En utilisant $A \in \mathbb{R} \iff A = \bar{A}$,
trouver tous les nombres complexes z tels que $A = (z - 2)(\bar{z} + i) \in \mathbb{R}$