

DM 1 : Un peu de calcul.

Exercice 1. [Correction]

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. On note que $x = \frac{2^a}{1 + 2^a}$.

Simplifier $y = \frac{2x}{1 + x}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On considère $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

Écrire S_{n+1} puis simplifier $S_{n+1} - S_n$.

Exercice 2. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n

En déduire v_n en fonction de n .

2. Calculer u_n en fonction de n .

A votre avis la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les nombres C_n défini par $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3 .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe $C_{n+1} - C_n$

La monotonie de la suite (C_n) est-elle monotone ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que : $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

En déduire que C_n est un entier.

4. Sans calcul supplémentaire, déduire des questions 2 et 3 que $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{n+1} \geq C_n + 1$

5. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Exercice 4. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$P_n =$ Le produit des entiers pairs de 2 à $2n = (2).(4).(6)....(2n-2)(2n)$

ET

$I_n =$ Le produit des entiers impairs de 1 à $(2n+1) = (1).(3).(5)....(2n+1)$

Calculer (à l'aide, entre autre, de factoriel) P_n puis $P_n \times I_n$ et enfin I_n .

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. On note que $x = \frac{2^a}{1+2^a}$. Simplifier $y = \frac{2x}{1+x}$.

$$\text{On a } y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2 \frac{2^a}{1+2^a}}{1 + \frac{2^a}{1+2^a}} = \frac{\frac{2 \cdot 2^a}{1+2^a}}{\frac{(1+2^a)+2^a}{1+2^a}} = \frac{2^{a+1}}{1+2^a} \frac{1+2^a}{1+2 \cdot 2^a} = \frac{2^{a+1}}{1+2^{a+1}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On considère $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ Écrire S_{n+1} puis simplifier $S_{n+1} - S_n$.

$$\begin{aligned} \text{On a } S_{n+1} - S_n &= \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right] - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &\quad \text{remarque } 2n+2 = 2(n+1) \\ &= \frac{(2n+1) + 2(n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{n[2+2-4] + [1+2-2]}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{u_n}{3-2u_n} \right)}{\left(\frac{u_n}{3-2u_n} \right) - 1} \\ &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n - (3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{3-2u_n}{u_n-3} = \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3} v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n v_0$

2. On sait $\frac{u_n}{u_n - 1} = v_n \implies u_n = v_n (u_n - 1) \Rightarrow u_n (1 - v_n) = v_n$

$$\text{Donc } u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^n v_0}{\left(\frac{1}{3} \right)^n v_0 - 1}$$

Comme $\left(\frac{1}{3} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^n v_0}{\left(\frac{1}{3} \right)^n v_0 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{0-1} = 0$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} - C_n &= \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} - \frac{1}{n+1} \right] \\
 &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{1}{n+2} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} - \frac{1}{n+1} \right] \\
 &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{(4n+2) - (n+2)}{(n+2)(n+1)} \right] \\
 &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[\frac{3n}{(n+2)(n+1)} \right] > 0
 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite (C_n) est strictement croissante.

3. On chemine du compliqué vers le plus simple.

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \text{On écrit la définition.} \\
 &= \text{On réduit au même dénominateur.} \\
 &= \text{On factorise et on simplifie.} \\
 &= \text{On obtient } \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n
 \end{aligned}$$

Comme $\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n}{n+1}$ sont des coefficients du binôme donc ce sont des entiers

Conclusion : le nombre C_n est un entier.

4. Comme C_{n+1} est **strictement** plus grand que C_n et que ce sont des entiers, on a bien $C_{n+1} \geq C_n + 1$
5. On a maintenant

$$\begin{aligned}
 C_n &\geq C_{n-1} + 1 \\
 &\geq C_{n-2} + 2 \\
 &\geq C_{n-3} + 3 \\
 &\vdots \\
 &\geq \underbrace{C_0 + n}_{=a_n}
 \end{aligned}$$

Comme $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, on a donc $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On a $P_n = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)$

$$= \underbrace{(2.1)} \underbrace{(2.2)} \cdots \underbrace{(2(n-1))} \underbrace{(2n)}$$

$$= \underbrace{2.2 \dots 2}_{n \text{ fois}} 1.2.3 \dots n$$

$$= 2^n n!$$

2. On a $I_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$, ainsi

$$I_n \times P_n = (1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)) \cdot (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n))$$

$$= 1.2.3 \dots (2n-1)(2n)(2n+1)$$

$$= \textbf{Le produit de tous les entiers de 1 à (2n+1)}$$

$$= (2n+1)!$$

3. On a $I_n \times P_n = (2n+1)!$

$$\text{Conclusion : } I_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$