

DM 2 Bonus

Exercice 1. [Correction] Soit z un complexe avec $\operatorname{Re}(z) + |z| \neq 0$

On considère le complexe $A = \frac{z + |z|}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Re}(z) + |z|}}$

Vérifier que : $A^2 = z$

Exercice 2. [Correction] Soit $z \neq 1$ un complexe.

Montrer que : $\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2}$

Exercice 3. [Correction]

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des **complexes** de module strictement plus petit que 1

On a donc : $z \in \mathcal{D} \iff |z|_{\text{Strict}} < 1$

Soit p et z fixé dans $\mathcal{D}$.

1. Justifier que $|\bar{p}z| < 1$. En déduire que : $\bar{p}z - 1 \neq 0$.

2. Montrer que : $1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|\bar{p}|^2)}{|1-\bar{p}z|^2}$

3. En déduire que :

$$\left. \begin{array}{l} p \in \mathcal{D} \\ t \in \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \in \mathcal{D}$$

Exercice 4. [Correction] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc = 1$ et $cz + d \neq 0$

Vérifier que : $\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On considère le complexe $A = \frac{z + |z|}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Re}(z) + |z|}}$. Vérifier que : $A^2 = z$

On va utiliser $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $|z|^2 = z\bar{z}$,

$$\begin{aligned} \text{On a } A^2 &= \left(\frac{z + |z|}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Re}(z) + |z|}} \right)^2 = \frac{z^2 + 2z|z| + |z|^2}{2(\operatorname{Re}(z) + |z|)} \\ &= \frac{z^2 + 2z|z| + z\bar{z}}{z + \bar{z} + 2|z|} \\ &= \frac{z[z + \bar{z} + 2|z|]}{z + \bar{z} + 2|z|} \\ &= z \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit $z \neq 1$ un complexe. Montrer que : $\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2}$

Solution comme en terminale

Comme $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{z+1}{z-1} \frac{\overline{z-1}}{\overline{z-1}} \\ &= \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - z + \bar{z} - 1}{|z-1|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or on sait que } -z + \bar{z} &= -(a + ib) + (a - ib) = 0 - i(2b) \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} + i \frac{-2b}{|z-1|^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2}$$

Solution plus "rapide"

On va utiliser $\operatorname{Re}(\square) = \frac{\square + \overline{\square}}{2}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &= \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(z+1)(\bar{z}-1) + (\bar{z}-1)(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} [2|z|^2 - 2|z-1|^2] \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des **complexes** de module strictement plus petit que 1. On a donc

$$z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |z| \underset{\text{Strict}}{<} 1$$

Soit p et z fixé qcq dans $\mathcal{D}$.

1. Justifier que $|\bar{p}z| < 1$. En déduire que : $\bar{p}z - 1 \neq 0$.

On a $|\bar{p}z| = |\bar{p}| |z| = |p| |z| \underset{\text{Strict}}{<} 1$ donc $\bar{p}z \neq 1$.

2. Montrer que : $1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|\bar{p}|^2)}{|1-\bar{p}z|^2}$

$$\begin{aligned} \text{On a } 1 - \left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 &= 1 - \left| \frac{H}{B} \right|^2 \quad \text{avec } H = p-z \text{ et } B = 1-\bar{p}z \\ &= 1 - \frac{H \bar{H}}{B \bar{B}} \\ &= \frac{B \bar{B} - H \bar{H}}{B \bar{B}} \\ &= \frac{(1-\bar{p}z)(1-p\bar{z}) - (p-z)(\bar{p}-\bar{z})}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &= \frac{[1-p\bar{z}-\bar{p}z+|p|^2|z|^2] - [|p|^2-p\bar{z}-\bar{p}z+|z|^2]}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &= \frac{1+|p|^2|z|^2-|p|^2-|z|^2}{|1-\bar{p}z|^2} \\ &\quad \text{Or on a } (1-|p|^2)(1-|z|^2) = 1+|p|^2|z|^2-|p|^2-|z|^2 \\ &= \frac{(1-|p|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{p}z|^2} \end{aligned}$$

3. oO Ainsi on a $1-|z|^2 > 0$ et $1-|\bar{p}|^2 = 1-|p|^2 > 0$ donc $\left| \frac{p-z}{1-\bar{p}z} \right|^2 < 1$.

Conclusion : $\frac{p-z}{1-\bar{p}z} \in \mathcal{D}$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Vérifier que : $\text{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ On a :

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ax+b+ia y)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\text{Moche} + i[acxy + ady - acxy - bcy]}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\text{Moche} + i[(ad-bc)y]}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\text{Moche} + i[y]}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \text{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \text{Im} \left(\frac{\text{Moche} + i[y]}{|cz+d|^2} \right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$