

Les Complexes.

1 Les complexes.

1.1 Le nombre i .

1.2 Les nombres complexes.

1.3 Opérations sur les complexes.

2 Conjugué, Module, Quotient.

2.1 Conjugué.

2.2 Module.

2.3 Quotient.

3 Les complexes $e^{i\theta}$

3.1 Définition.

3.2 Module-Argument.

3.3 Calculer $e^z = e^{a+ib}$

4 Applications

4.1 Introduction à la trigonométrie

4.2 Un peu de géométrie

1 Les complexes.

1.1 Le nombre i .

Définition 1. le nombre i

Le nombre i est l'unique solution dans
de l'équation $X^2 = -1$.

Un autre points de vue

Après des siècles de vaines recherches, les "anciens" ont admis/accepté que

l'équation $X^2 = -1$ n'a pas de Solution/Racine dans $\mathbb{R}$

Puis des esprits ingénieux ont eu l'idée d'introduire un nombre "imaginaire", noté $\sqrt{-1}$ vérifiant $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Après quelles manipulations, on s'est rendu compte que la notation $\sqrt{-1}$ pouvait aboutir à des contradictions

Par exemple : $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$
 $\Rightarrow (\sqrt{-1})^2 = 1$ OUPS

Les contradictions viennent de la notation $\sqrt{-1}$ et de la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Conclusion : On a remplacé la notation $\sqrt{-1}$ par i , CàD $\sqrt{-1} = i$ et depuis tout va bien.

Définition 2. Le nombre "imaginaire" i

Il existe un nombre, noté i , tel que $i^2 = -1$
Le nombre i n'est pas un nombre réel, c'est un nombre "imaginaire"
mais il suit les mêmes règles de calculs que les autres nombres

Ainsi on a $i^2 = -1$ et aussi
 $i^3 = i^{2+1} = i^2.i = -i$
 $i^4 = i^{3+1} = i^3.i = (-i).i = -i^2 = 1(-1) = 1$
 $i^4 = i^{2+2} = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

...etc.... $i^5 = i$, $i^6 = -1$,....

Bonus : l'équation $X^2 = -1$ admet exactement 2 solution $X = i$ et $X = -i$.

1.2 Les nombres complexes.

Les "nombres" complexes sont les "nombres-objet" de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Par exemples : $2 + 3i$, $-3 + 5i$, $\frac{1}{2} - i$, $3 = 3 + 0i$, $2i\pi = i(2\pi) = 0 + (2\pi)i$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, ainsi on a

Conclusion : $z \in \mathbb{C}$ Ssi on peut écrire $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
C'est la forme algébrique du complexe z

Polynôme et Géométrie On a : $z = a + ib = a.(1) + b.(i)$,

CàD les nombres complexes sont le mélange des nombres "remarquables" (1) et (i).

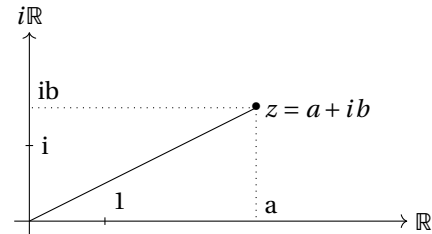
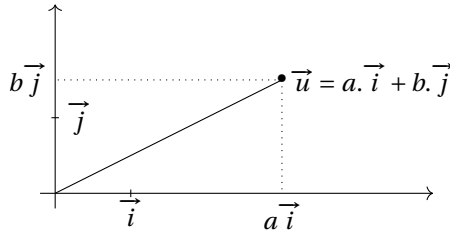
> Polynôme.

Il y a une analogie entre les complexes $z = a + ib = a.(1) + b.(i)$ et les polynômes $P = a + bX = a.(1) + b.(X)$

> Géométrie.

Il y a une analogie entre le complexe $z = a.(1) + b.(i)$ et le vecteur $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ et on a le bô dessin



Vocabulaire.

Les nombres $a = a + 0i$ sont les nombres réels "classiques".

Les nombres $ib = 0 + ib$ sont les nombres imaginaires purs.

Les nombres $a + ib$ sont les nombres complexes.

Vocabulaire. Soit $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a + ib$

> Le réel a est la partie réelle du complexe z , notée $\text{Re}(z)$.

> Le réel b est la partie imaginaire du complexe z , notée $\text{Im}(z)$.

Du bon sens numéro 1.

La forme algébrique est unique, CàD

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad \text{et/ou} \quad z = z' \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

Du bon sens numéro 2.

Le complexe z est réel Ssi $z = a + ib \in \mathbb{R}$ Ssi $b = \text{Im}(z) = 0$.

Le complexe z est imaginaire pur Ssi $z = a + ib \in i\mathbb{R}$ Ssi $a = \text{Re}(z) = 0$

1.3 Opérations sur les complexes.

Théorème 3.

Avec les nombres complexes, on peut faire

- > Addition, Soustraction, Mélange (comme avec les vecteurs), CàD $2z - 3z'$
- > Produit (comme avec les polynômes), CàD $z.z'$ ou $z^2 = z.z$ ou $z^3 = z.z.z$
- > On peut faire les polynômes, CàD $2z^2 - 3z + 5$ ou $2.z^2 - 3i.z + 5 + 7i$
- > On peut aussi faire des quotients et même des puissances

Formulaire.

> Quand on mélange 2 complexes, c'est comme lorsqu'on mélange 2 vecteurs, donc les coef/coordonnées se mélangent
CàD $\text{Re}(2z - 3z') = 2\text{Re}(z) - 3\text{Re}(z')$,.....

> Quand on produit deux complexes, C'est comme pour le produit de polynômes, donc ce n'est pas le produit des coef
CàD $\text{Re}(z.z') \neq \text{Re}(z).\text{Re}(z')$ et $\text{Re}(z^n) \neq (\text{Re}(z))^n$

On a de même pour la partie imaginaire Im

2 Conjugué, Module, Quotient.

2.1 Conjugué.

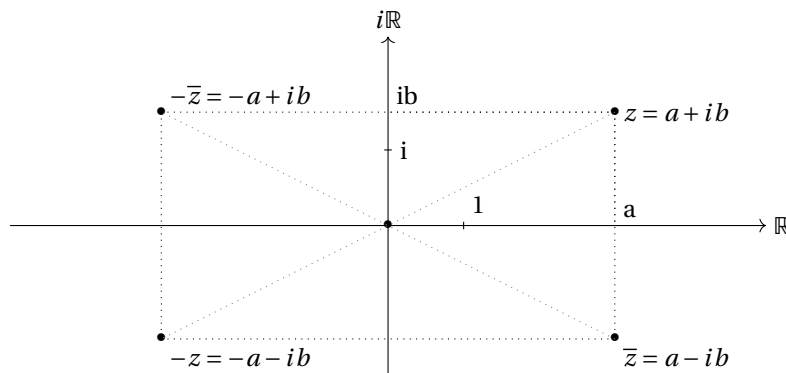
Définition 4. Conjugué

Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle conjugué de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe défini par :

$$\bar{z} = \overline{a + ib} \stackrel{\text{def}}{=} a - ib$$

$$\text{Exemples : } \bar{2} = \overline{2 + i0} = 2, \quad \bar{i} = \overline{0 + 1i} = -i, \quad \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$$



On a la remarquable propriétés :

$$z.\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Théorème 5. Formulaire

Soit $z = a + ib$, $z' = a - ib$ des complexes

> Géométrie.

$\bar{z}$ c'est le symétrique de z par rapport à l'axe $\mathbb{R}$.

$$z \in \mathbb{R} \iff z \text{ est un réel} \iff b = \text{Im}(z) = 0 \iff \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z \text{ est un imaginaire pur} \iff a = \text{Re}(z) = 0 \iff \bar{z} = -z$$

> Facile.

Comme $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$, on a

$$a = \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{Et} \quad b = \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

> Formulaire.

$$\bar{\bar{z}} = \dots\dots \quad \overline{2z - 3z'} = \dots\dots \quad \overline{z \cdot z'} = \dots\dots \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dots\dots$$

Moralité : La conjugaison, c'est comme la misère

$$\frac{\overline{z - i}}{\overline{i \cdot z - 1}} =$$

Démonstration : La démonstration la plus simple est la meilleure,

CàD on note que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$> \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + ib) + (a - ib)}{2} = a = \text{Re}(z)$$

$$> \bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = \overline{a + (-b)i} = a - (-b)i = a + ib = z$$

> Addition.

$$\text{D'une part : } \overline{z + z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b')$$

$$\text{D'autre part : } \overline{\bar{z} + \bar{z'}} = \overline{(a - ib) + (a' - ib')} = \overline{(a + a') - i(b + b')} = (a + a') - i(b + b')$$

$$\text{Donc on a bien } \overline{z + z'} = \overline{\bar{z} + \bar{z'}}$$

> Produit.

$$\text{D'une part : } \overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \dots$$

$$\text{D'autre part : } \overline{\bar{z} \cdot \bar{z'}} = \overline{(a - ib) \cdot (a' - ib')} = \dots$$

$$\text{Donc on a bien } \overline{zz'} = \overline{\bar{z} \cdot \bar{z'}}$$

> Quotient. On le fera quand on aura défini le quotient de deux complexes

2.2 Module.

Définition 6. Module d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme algébrique.

le module de z , noté $|z|$, est le réel

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$$

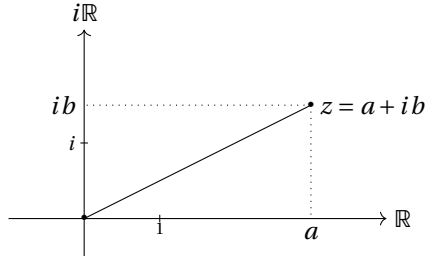
= La longueur entre 0 et z

Exemples :

$$|-1| = 1$$

$$|i| = 1$$

$$|2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



Géométrie.

$|z|$ = la distance entre z et 0.

Ainsi $|z| = |z - 0|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

La distance entre le point A d'affixe z et A' d'affixe z' est égale à $|z - z'| = |z' - z|$

Théorème 7. formulaire pour le module

Soit z un complexe.

$$\text{Indispensable } |z|^2 = z \cdot \bar{z} \text{ et } |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

> Classique.

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{et} \quad \text{Lorsque } z' \neq 0, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\text{- Lorsque } n \in \mathbb{N} \text{ alors } |z^n| = |z|^n.$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

> **Distance.** La distance entre z et z' est égale à $|z - z'| = |z' - z|$

Application $|z| = |z - 0|$ = la distance entre z et 0.

Ainsi $|z|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

> L'inégalité triangulaire.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad |2z - 3z'| \leq 2|z| + 3|z'|$$

De plus il y a égalité, CàD $|z + z'| = |z| + |z'|$

Ssi z et z' sont sur la même demi-droite issue de 0

Ssi il existe $k \geq 0$ tel que $z' = kz$ si $z \neq 0$

Démonstration : Le plus simple est le mieux.

Comme $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a + ib$ ainsi

> Démonstration de $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$.

On a $-z = -a - ib$, $\bar{z} = a - ib$ et $-\bar{z} = -a + ib$, on a

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

et idem pour les autres.

> Démonstration de $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

On va calculer $|z \cdot z'|^2$ avec les conjugués $|z \cdot z'|^2 = z \cdot z' \cdot \overline{z \cdot z'} = z \cdot z' \cdot \bar{z} \cdot \bar{z}' = z \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}' = |z|^2 \cdot |z'|^2$

Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

>> Démonstration de $|z^n| = |z|^n$

On fait une récurrence.

2.3 Quotient.

Définition 8.

Soit $z = a + ib$ un complexe.

Pour calculer $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$, il faut multiplier par le conjugué $\bar{z} = a - ib$

Rappel : $(a + ib)(a - ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$ ou bien $z\bar{z} = |z|^2$

Formulaire. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

> **Calcul.**

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

> **Quotient et conjugué.**

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ et plus généralement } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Moralité : La conjugaison se diffuse vraiment partout!!!!

Application : soit a, b, c, d des réels ainsi $\bar{a} = a, \dots$

$$\overline{\left(\frac{az + b}{cz' + d}\right)} = \text{La conjugaison se diffuse} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z}' + \bar{d}} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z}' + d}$$

> **Quotient et module.**

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Démonstration :

> Conjugué.

$$\text{D'une part : } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a + ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{D'autre part : } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \dots$$

$$\text{Donc on a bien } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

> Produit :

$$\text{On a } \left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \left(\frac{z}{z'}\right) \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z}{z'} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{z \cdot \bar{z}}{z' \cdot \bar{z}'} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

3 Les complexes $e^{i\theta}$

3.1 Définition.

Notation : L'ensemble des complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

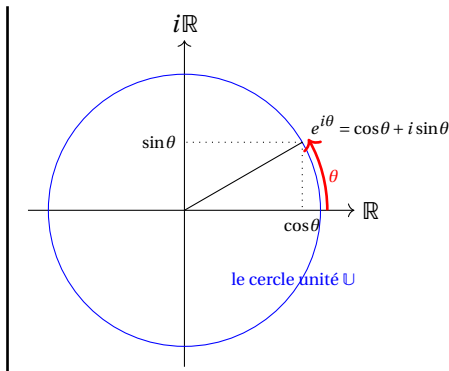
Ainsi on a : $z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1$

Définition 9.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

Le complexe $\cos \theta + i \sin \theta$ est noté $e^{i\theta}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$$



À connaître

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Ces formules sont "évidentes" dès que l'on pense à placer les points sur le cercle unité.

Attention l'angle est en radian, CàD avec π

Théorème 10.

Thm Moivre : Le formulaire sur les puissances s'applique aussi avec les $e^{i\alpha}$.

Propriétés "évidentes".

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$$

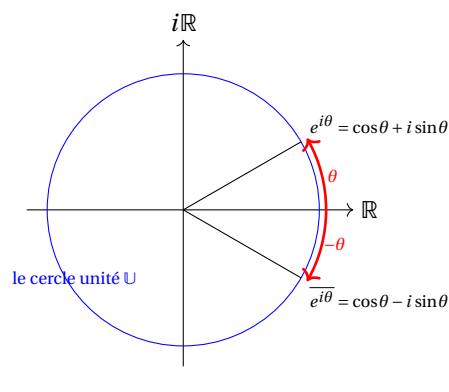
$$\text{et } |e^{i\theta}| = 1 \quad \text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1$$

Propriétés "puissances".

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \text{ et } \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$e^{i2\alpha} = (e^{i\alpha})^2 \text{ et } e^{i3\alpha} = (e^{i\alpha})^3$$



Factorisation par l'argument moitié.

Quand on rencontre les complexes $1 + e^{i\theta}$, on doit penser à factoriser l'argument moitié

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} \left[e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2} \right] \\ &= e^{i\theta/2} \left[\underbrace{(C - iS) + (C + iS)}_{2 \cos(\theta/2)} \right] = \underbrace{e^{i\theta/2}}_{\text{Ici c'est l'angle}} \underbrace{2 \cos(\theta/2)}_{\text{Ici c'est le module}} \end{aligned}$$

Ce calcul s'adapte à $1 - e^{i\theta}$ et à $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$

3.2 Module-Argument.

Théorème 11. Module et argument d'un complexe

> Soit z un complexe avec $|z| = 1$

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ Attention : θ n'est pas unique.

Application : Quand on rencontre A un complexe avec $|A| = 1$,

Alors on peut écrire $A = e^{i\theta}$

Ainsi on remplace A par $e^{i\theta}$ et l'on poursuit les calculs.

> Soit z un complexe $z \neq 0$

Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$

c'est la forme trigonométrique ou circulaire de z .

De plus

- le réel r est unique car $r = |z|$.

- Mais le réel θ , appelé **UN** argument de z n'est pas unique, on le note $\arg(z)$.

En revanche il existe un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$

c'est L'argument principal de z et on le note $Arg(z)$

Théorème 12. Non-unicité

> On a $0 \neq 2\pi$ et pourtant $e^{i0} = e^{i2\pi}$, CàD $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \nRightarrow \theta = \theta'$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$$

> Plus généralement $z = z' \iff r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \end{cases}$

Définition 13. Argument Principal d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On appelle argument de z tout réel θ tel que $z = r e^{i\theta}$.

Lorsque $z \neq 0$, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + k(2\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

CàD les arguments de z sont congrus modulo 2π .

Lorsque $z \neq 0$, il possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, que l'on appelle argument principal de z , et qu'on note $Arg(z)$.

3.3 Calculer $e^z = e^{a+ib}$

Définition 14. Calculer $e^z = e^{a+ib}$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On définit le nombre complexe $e^z = e^{a+ib}$ par la formule

$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{def}{=} e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Ainsi $\operatorname{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cos b$ et $\operatorname{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b$

Le formulaire classique des nombres exp est encore valide avec les exponentielles complexes.

Démonstration : $e^z \cdot e^{z'} = e^{a+ib} \cdot e^{a'+ib'} = e^a e^{ib} \cdot e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'} \cdot e^{i(b+b')} = e^{(a+a') + i(b+b')} = e^{z+z'}$

4 Applications

4.1 Introduction à la trigonométrie

Théorème 15. Formule de Moivre-Euler

On a les formules suivantes

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

Ainsi que

$$\cos(\alpha) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \operatorname{Im}(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Grâce à ces formules et formulaire sur les puissances, on fabrique plein de "formule trigo".

$$\text{- } \cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{i2x}) = \operatorname{Re}\left([e^{ix}]^2\right) = \operatorname{Re}\left([\cos(x) + i \sin(x)]^2\right) = \operatorname{Re}(\text{À développer}).$$

$$\text{de même pour } \cos(3x) \text{ ou } \sin(2x) = \operatorname{Im}(e^{i2x})$$

$$\text{- } \cos^2(a) = [\cos(a)]^2 = \left[\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right]^2 = \text{On développe et on regroupe.}$$

$$\text{- } \cos(a) \cos(b) = \left[\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right] \left[\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right] = \text{On développe et on regroupe.}$$

4.2 Un peu de géométrie

On munit le plan du repère orthonormée classique $(O; \vec{i}, \vec{j})$

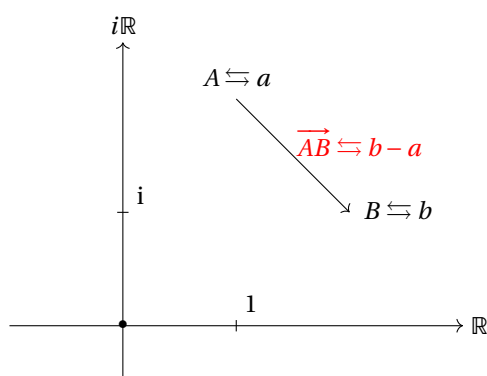
Définition 16. Correspondance : Point $\leftrightarrow$ Vecteur $\leftrightarrow$ Complexe

$$\left(\begin{array}{l} \text{Le point } M : (a, b) \\ \text{de coordonnées } (a, b) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Le vecteur } \overrightarrow{OM} = (a, b) \\ \text{avec } \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Le complexe } z \\ \text{avec } z = a + bi \end{array} \right)$$

On dit que : le complexe $z = a + ib$ est l'afixe du point $M : (a, b)$

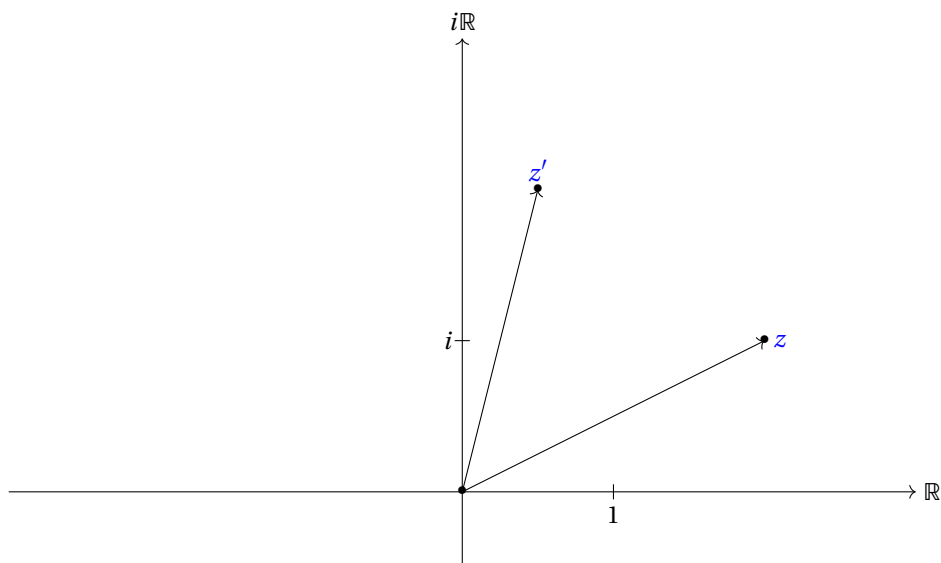
ou bien que : le complexe $z = a + ib$ est l'afixe du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = (a, b)$

Affixe d'un vecteur : Soit A, B deux points d'afixe a, b alors l'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$



Addition, Produit

Soit les complexes z et z' . Comment on construit : $z + z'$, $z - z'$ et $z.z'$?



Distance, Milieu.

Soit A, B des points d'affixes a, b Alors

$d(A, B)$ = La distance entre A et B est égale à

L'affixe du milieu du segment du $[AB]$ est

Formule d'un angle orienté.

Soit A, B, C des points d'affixes a, b, c

l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égale à θ Ssi $\frac{c-a}{b-a} = \dots = r e^{i\theta}$

Application

Les points A, B et C sont alignés Ssi θ , l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à 0 ou π

$$\text{Ssi } e^{i\theta} = 1 \text{ ou } -1$$

$$\text{Ssi } r e^{i\theta} = \pm r \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ssi le complexe } \frac{c-a}{b-a} \text{ est réel}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux Ssi θ , l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ssi } e^{i\theta} = i \text{ ou } -i$$

$$\text{Ssi } r e^{i\theta} = \pm i r \in i\mathbb{R}$$

$$\text{Ssi le complexe } \frac{c-a}{b-a} \text{ est imaginaire pur}$$

Le triangle ABC est équilatéral (direct) Ssi θ , l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\frac{\pi}{6}$ et $r = 1$

$$\text{Ssi } \frac{c-a}{b-a} = r.e^{i\theta} = e^{i\pi/6}$$