

Exercices sure les complexes

1 Forme Algébrique

1.1 QCM	1
1.2 Le nombre complexe j	2
1.3 Forme Algébrique	3
1.4 Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$	4

2 Forme polaire, circulaire

2.1 QCM	5
2.2 Sous la forme $r e^{i\theta}$	5

3 Un peu de trigo

6

4 Un peu de géométrie

6

1 Forme Algébrique

1.1 QCM

Exercice 1. Applications

1. À quoi est égal i^7

- ☐ 1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ -1

2. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$

- ☐ $5+5i$ ☐ $-7+5i$ ☐ $-5-5i$ ☐ $-7-5i$

3. À quoi est égal $(1+i)^3$

- ☐ $2+2i$ ☐ $-2+2i$ ☐ $2-2i$ ☐ $-2-2i$

4. À quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(i-1)$

- ☐ $16i$ ☐ $-16i$ ☐ 16 ☐ -16

5. À quoi est égal $Z = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

- ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ $2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$ ☐ $2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$ ☐ $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

6. Quel est le(s) nombre(s) qui élevé au carré, vaut i ?

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

7. À quoi est égal $\overline{i(z-1)}$

- ☐ $i.\bar{z}-i$ ☐ $i.\bar{z}+i$ ☐ $-i.\bar{z}+i$ ☐ $-i.\bar{z}-i$

8. Quel est le module de $\frac{1}{-3+4i}$

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{1}{25}$

9. On suppose que $|z|=1$. À quoi est égale $\frac{1}{z}$

- ☐ $\frac{1}{\bar{z}}$ ☐ $-z$ ☐ $-\bar{z}$ ☐ $\bar{z}$

10. Identifier la figure définie par $|z+i| \leq 2$.

- ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2
☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

1.2 Le nombre complexe j

On considère le nombre complexe $j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Formulaire

- (a) Déterminer sa partie réelle, imaginaire, son conjugué, son module.

Calculer $j^2, j^3, j^4, \dots$

Placer ces nombres complexes dans le plan complexe.

- (b) Vérifier que j est une racine du polynôme $X^2 + X + 1$. Trouver l'autre racine.

2. En utilisant le formulaire ci-dessus, répondre aux questions suivantes

- (a) Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + bj$, où a et b sont des nombres réels :

$$z_1 = (1 + j)^7, \quad z_2 = (2 - j)(3 + 2j), \quad z_3 = \frac{j^9}{1 + j} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1}{1 - j}$$

- (b) Calculer $(x - y)(x - jy)(x - j^2y)$

1.3 Forme Algébrique

Exercice 2. Exercice que l'on va faire en classe.

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= (1 - i\sqrt{3})^2 \\ z_2 &= \frac{1 - 4i}{1 + 5i} \\ z_3 &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ z_4 &= \frac{1 - 2i}{1 + 5i} + \frac{1 + 2i}{1 - 5i} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z_5 &= (2 + i)^3 \\ z_6 &= \frac{-4}{1 + i\sqrt{5}} \\ z_7 &= \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 \\ z_8 &= (a + ib)^3 + (a - ib)^3 \\ &\text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

2. On considère $z_1 = \frac{4 - i}{3 + 2i}$ et $z_2 = \frac{4 + i}{3 - 2i}$

Vérifier que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, les quantités suivantes :

$$\operatorname{Re}(iz), \operatorname{Im}(iz), \operatorname{Re}(z^2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z^2)$$

4. Soit z un complexe non nul. Calculer $\left| \frac{z}{|z|} \right|$. Interpréter.

5. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. On veut vérifier que $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

(a) En utilisant $u = a + ib$ et $v = a' + ib'$, montrer que : $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

(b) En utilisant $|\square|^2 = \square \overline{\square}$, montrer que : $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

6. Soit $z = a + ib$ un complexe non-nul

Calculer la partie imaginaire de $z + \frac{1}{z}$.

En déduire que : $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{U} \text{ ou } z \in \mathbb{R})$

Exercice 3. Du calcul

1. Calculer $(1 - i)^3$, $(-2 + 3i)^4$, $(2 + i)^5$

2. Calculer $|-2|$, $|3i|$, $|-1 + i|$, $\left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$, $|(1 + i)^3|$

3. Mettre les complexes sous forme algébrique $\frac{1}{2 + 3i}$, $\frac{2 - i}{1 + 2i}$

Exercice 4. [Correction] On veut calculer $|1 + iz|^2 + |z + i|^2$.

1. Soit $z = a + ib$. Calculer $|1 + iz|^2 + |z + i|^2$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant $|\square|^2 = \square \overline{\square}$, calculer $|1 + iz|^2 + |z + i|^2$

Exercice 5. [Correction] Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\left| \frac{2}{1 + it} - 1 \right|$

2. Géométriquement où se trouve le point M d'affixe $\frac{2}{1 + it}$

Exercice 6. [Correction] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc = 1$ et $cz + d \neq 0$

$$\text{Vérifier que : } \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Exercice 7. [Correction] Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et $|a| = 1$. Montrer que : $\left| \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \right| = 1$

Exercice 8. [Correction] Soit u un complexe avec $u \neq 1$. Soit z un complexe avec $z \notin \mathbb{R}$.

$$\text{On veut montrer : } \frac{z - u\overline{z}}{1 - u} = A \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$$

$\Leftarrow$ Calculer $\overline{A} - A$. Conclure.

$\Rightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

On doit montrer $|u| = 1$, CàD $u\overline{u} = \dots = 1$.

Étape 1 : On isole u . Étape 2 : On calcule $u\overline{u}$.

1.4 Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 9. [Correction] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{2i\}$ par

$$f : z \mapsto f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\operatorname{Re}(f(z))$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$
2. On suppose que $z = x + iy$, calculer $|f(z)|^2$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $|f(z)|^2 = 1$

Exercice 10. [Correction] Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction f qui, à z associe le complexe $z' = f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z\overline{z} + 1}$

1. Justifier que le nombre $f(z)$ est bien définie, CàD on ne divise jamais par 0.
2. Montrer que $z' = f(z) \in \mathbb{R} \iff z^2 - \overline{z}^2 = 4i$ Rappel $z' \in \mathbb{R} \iff \overline{z'} = z'$.
3. En déduire que : $z' = f(z) \in \mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + i\frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}$
4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z' = f(z) \in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + ix$ ou $z = x - ix$.

2 Forme polaire, circulaire

2.1 QCM

Exercice 11.

1. À quoi est égale $e^{i\frac{7\pi}{2}}$

- ☐ 1 ☐ -1 ☐ -i ☐ -i

2. À quoi est égale $-e^{i\frac{\pi}{6}}$

- ☐ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ☐ $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

3. Placer les complexes suivants sur le cercle trigo.

$$e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\pi}, e^{-i\frac{\pi}{8}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{12}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, e^{i\frac{17\pi}{3}}, e^{i\frac{56\pi}{8}}$$

4. À quoi est égale $e^{-i\frac{5\pi}{4}}$

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

5. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{6}}$

- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 12.

1. À quoi est égale $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{1\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

2. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- ☐ $e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{-\pi}{12}}$ ☐ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$

3. À quoi est égale $\frac{1}{e^{i\theta}}$

- ☐ $e^{i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\theta}$ ☐ $-e^{i\theta}$

4. À quoi est égale $i e^{i\theta}$

- ☐ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ☐ $e^{i\theta + \frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta + i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta - i\frac{\pi}{2}}$

2.2 Sous la forme $re^{i\theta}$

Exercice 13. [Correction]

1. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants : 12, -4, $-2i\sqrt{3}$, $1+i$, $\frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

2. En utilisant la forme trigo, calculer $\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}$, $\frac{1}{1+i\tan x}$, $\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$, $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n$

Exercice 14. [Correction] Factoriser l'argument moitié

1. Soit $e^{i\theta}$ un complexe $\neq 1$. Calculer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)$

2. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire de $\frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}}$

Exercice 15. [Correction] Montrer $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left. \begin{array}{l} |z| = |z'| = 1 \\ z.z' \neq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{z+z'}{1+z.z'} \in \mathbb{R}.$$

Rappel : $|z| = 1$, alors on peut écrire $z = e^{i\theta}$

Exercice 16. [Correction] Soient a et b , deux complexes de module 1 tels que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ et $\frac{a+b}{1+ab}$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Rappel : a est un complexe de module 1, alors on peut écrire $a = e^{i\alpha}$

3 Un peu de trigo

Exercice 17.

- Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) & \text{et} & \quad \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

- Montrer que

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) & \text{et} & \quad \sin(3x) = \sin(x) (4 \cos^2(x) - 1) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \end{aligned}$$

Exercice 18.

- Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Application : En déduire une primitive de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$

- Montrer que

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(y) &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \\ \cos(x) \sin(y) &= \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \end{aligned}$$

- Finir le calcul

$$\cos^3(x) = [\cos(x)]^3 = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^3 = \text{On développe avec le binôme, on simplifie les puissance puis on regroupe.}$$

Application : En déduire une primitive de $\cos^3(x)$.

4 Un peu de géométrie

Exercice 19. Soit A un point d'affixe z . Reconnaître les figures définie par

$$|2z-3| = 5, \quad |2z-3| \geq 5 \quad \text{et} \quad \text{par} \quad \max(|z-1|, |z+1|) \leq 2$$

Exercice 20. Théorème de Von Aubel.

On considère un quadrilatère $ABCD$ de sens direct et on note a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D .

On construit 4 carrés C_1, C_2, C_3 et C_4 de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$.

- Faire une figure avec le quadrilatère $ABCD$, le carré C_1 et son centre P

Calculer les affixes des différents points en fonction des complexes a et b . En particulier déterminer l'affixe de P

- Démontrer que les diagonales de $PQRS$ sont perpendiculaires et de mêmes longueurs

Conclusion le quadrilatère $PQRS$ est un carré (c'est le thm de Von Aubel).

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$\begin{aligned}
 1. \text{ On a } |u+v|^2 + |u-v|^2 &= |(a+ib) + (a'+ib')|^2 + |(a+ib) + (a'+ib')|^2 \\
 &= |(a+a') + i(b+b')|^2 + |(a-a') + i(b-b')|^2 \\
 &= [(a+a')^2 + (b+b')^2] + [(a-a')^2 + (b-b')^2] \\
 &= [a^2 + a'^2 + 2a.a' + b^2 + b'^2 + 2b.b'] + [a^2 + a'^2 - 2a.a' + b^2 + b'^2 - 2b.b'] \\
 &= 2(a^2 + b^2) + 2(a'^2 + b'^2) \\
 &= 2(|u|^2 + |v|^2) \\
 2. \text{ On a } |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\
 &= (u+v)(\overline{u} + \overline{v}) + (u-v)(\overline{u} - \overline{v}) \\
 &= [\cdot] + [\cdot] \\
 &= 2(|u|^2 + |v|^2)
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Soit $z = a + ib$.

$$\text{On a } |1+iz|^2 = |1+i(a+ib)|^2 = |(1-b) + ia|^2 = (1-b)^2 + a^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$> |z+i|^2 = |(a+ib) + i|^2 = |a+i(b+1)|^2 = a^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 2b + 1$$

$$\text{Conclusion : } |1+iz|^2 + |z+i|^2 = [a^2 + b^2 - 2b + 1] + [a^2 + b^2 + 2b + 1] = 2a^2 + 2b^2 + 1 = 2|z|^2 + 2$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 |1+iz|^2 + |z+i|^2 &= (1+iz)\overline{1+iz} + (z+i)\overline{z+i} \\
 &= (1+iz)(1-i\overline{z}) + (z+i)(\overline{z}-i) \\
 &= [1-i\overline{z} + iz + z\overline{z}] + [z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1] \\
 &= 2z\overline{z} + 2 \\
 &= 2|z|^2 + 2
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

> Le plus rapide

$$\left| \frac{2}{1+it} - 1 \right| = \left| \frac{1-it}{1+it} \right| \stackrel{\text{Formulaire}}{=} \frac{|1-it|}{|1+it|} \stackrel{\text{def module}}{=} \frac{\sqrt{(1)^2 + (-t)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (t)^2}} = 1$$

> Avec les conjugués

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2}{1+it} - 1 \right| &= \sqrt{\square \square} = \sqrt{\left(\frac{2}{1+it} - 1 \right) \overline{\left(\frac{2}{1+it} - 1 \right)}} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2}{1+it} - 1 \right) \left(\frac{2}{1-it} - 1 \right)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2-(1+it)}{1+it} \right) \left(\frac{2-(1-it)}{1-it} \right)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1-it}{1+it} \right) \left(\frac{1+it}{1-it} \right)} \\
 &= \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

> Comme en terminal c'est plus long et plus difficile

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2}{1+it} - 1 \right| &\stackrel{\text{Forme } a+ib}{=} \left| \frac{2}{(1+it)(1-it)} - 1 \right| \\
 &= \left| \frac{2(1-it)}{1^2+t^2} - 1 \right| \\
 &= \left| \frac{1-t^2}{1+t^2} - i \frac{2t}{1+t^2} \right| \\
 &\stackrel{\text{def module}}{=} \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2t^2+1}} = \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\left| \frac{2}{1+it} - 1 \right| = \text{Distance entre } \frac{2}{1+it} \text{ et } 1 \text{ est égale à } 1.$

Ainsi $\frac{2}{1+it}$ est sur le cercle de centre $\Omega = (1,0)$ et de Rayon 1.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On a que

$$\begin{aligned}
 \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)(\overline{cz+d})}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{(ax+by+iax+ibay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{\text{Moche} + i[acxy+ady- acxy-bcy]}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{\text{Moche} + i[(ad-bc)y]}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{\text{Moche} + i[y]}{|cz+d|^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\text{Moche} + i[y]}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

Comme $|a| = 1$, Donc on sait que $\bar{a}.a = |a|^2 = 1$

On va utiliser $|\square| = \sqrt{\square \bar{\square}}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| &= \sqrt{\square \bar{\square}} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right) \overline{\left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right)}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right) \left(\frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-ab} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{\text{On développe le haut}}{\text{On développe le Bas}}} \\ &\quad \text{On utilise que } a\bar{a} = |a|^2 = 1^2 = 1 \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

$\Leftarrow$ On suppose que $|u| = 1$

On sait que $A \in \mathbb{R} \iff \bar{A} = A \iff \bar{A} - A = 0$.

On doit montrer $\bar{A} - A = 0$.

On a

$$\begin{aligned} \bar{A} - A &= \overline{\left(\frac{z - uz}{1 - u} \right)} - \frac{z - uz}{1 - u} = \frac{\bar{z} - \bar{u}\bar{z}}{1 - \bar{u}} - \frac{z - uz}{1 - u} \\ &= \frac{(\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) - (z - uz)(1 - \bar{u})}{(1 - \bar{u})(1 - u)} \\ &= \frac{[\bar{z} - \bar{z}u - \bar{u}z + \bar{u}uz] - [z - z\bar{u} - u\bar{z} + u\bar{u}\bar{z}]}{(1 - \bar{u})(1 - u)} \\ &\quad \text{De plus } u\bar{u} = |u|^2 = 1, \text{ Donc Haut} = \mathcal{O} \\ &= \frac{\mathcal{O}}{(1 - \bar{u})(1 - u)} = \mathcal{O} \quad \text{Yes!} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

On va montrer $|u| = \sqrt{u\bar{u}} = 1$

$$\text{On a } \frac{z - uz}{1 - u} = A \implies u = \frac{A - \bar{z}}{A - z}$$

$$\text{Ainsi on a : } |u| = \sqrt{u\bar{u}} = \sqrt{\frac{A - \bar{z}}{A - z} \cdot \overline{\left(\frac{A - \bar{z}}{A - z} \right)}} = \sqrt{\frac{A - \bar{z}}{A - z} \cdot \frac{\bar{A} - z}{\bar{A} - \bar{z}}} = \sqrt{\frac{A - \bar{z}}{A - z} \cdot \frac{A - z}{A - \bar{z}}} = \sqrt{1} = 1$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\operatorname{Re}(f(z))$.

Le texte indique qu'il faudra remplacer z par $x + iy$, mais avant on fait BasBar!!!

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z+1}{z-2i} = \frac{z+1}{z-2i} \frac{\overline{z-2i}}{\overline{z-2i}} \\
 &= \frac{(z+1)(\bar{z}+2i)}{|z-2i|^2} \\
 &= \frac{z\bar{z}+2iz+\bar{z}+2i}{|z-2i|^2} \\
 &= \frac{(x^2+y^2)+2i(x+iy)+(x-iy)+2i}{|z-2i|^2} \\
 &\quad \text{On remplace } z \text{ par } x+iy \\
 &= \left(\frac{x^2+y^2-2y+x}{|z-2i|^2} \right) + i \left(\frac{2x-y+2}{|z-2i|^2} \right)
 \end{aligned}$$

Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$

$$\text{On a } \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \iff \frac{x^2+y^2-2y+x}{|z-2i|^2} = 0 \iff x^2+y^2-2y+x=0$$

Complément : les points de coordonnées (x, y) avec $x^2+y^2-2y+x=0$ forment un cercle mais ce n'est plus au programme.

2. On suppose que $z = x + iy$, calculer $|f(z)|^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } |f(z)|^2 &= \left| \frac{z+1}{z-2i} \right|^2 = \left(\frac{z+1}{z-2i} \right) \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+2i} \right) \\
 &= \frac{z\bar{z}+z+\bar{z}+1}{z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}+4} \\
 &\quad \text{On remplace } z \text{ par } x+iy \\
 &= \frac{(x^2+y^2)+2x+1}{(x^2+y^2)-4y+4}
 \end{aligned}$$

Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $|f(z)|^2 = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{On a } |f(z)|^2 = 1 &\iff \frac{(x^2+y^2)+2x+1}{(x^2+y^2)-4y+4} = 1 \\
 &\iff (x^2+y^2)+2x+1 = (x^2+y^2)-4y+4 \\
 &\iff 2x+4y-3=0
 \end{aligned}$$

Les points de coordonnées (x, y) avec $2x+4y-3=0$ forment une droite

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a $f(z) = \frac{z^2 + 2i}{z\bar{z} + 1} = \frac{\text{Haut}}{\text{Bas}}$

Comme $\text{Bas} = z\bar{z} + 1 = (x + iy)(x - iy) + 1 = x^2 + y^2 + 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$, ainsi Bas est toujours $\neq 0$.
Donc on ne divise jamais par 0.

2. On a

$$\begin{aligned} z' = f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1} \in \mathbb{R} &\iff \overline{z'} = z' \\ &\iff \overline{\left(\frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1}\right)} = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1} \\ &\iff \frac{\bar{z}^2 + 2i}{z\bar{z} + 1} = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1} \\ &\iff \bar{z}^2 + 2i = z^2 - 2i \\ &\iff z^2 - \bar{z}^2 = 4i \end{aligned}$$

3. On écrit $z = x + iy$ et on poursuit le calcul.

$$\begin{aligned} z' = f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1} \in \mathbb{R} &\iff z^2 - \bar{z}^2 = 4i \\ &\iff (x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i \\ &\iff [x^2 - y^2 + i2xy] - [x^2 - y^2 - i2xy] = 4i \\ &\iff i4xy = 4i \\ &\iff y = \frac{1}{x} \quad \text{avec } x \neq 0 \\ &\iff z = x + iy = x + i\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Conclusion : On a bien $z' = f(z) \in \mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + i\frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z' = f(z) \in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + ix$ ou $z = x - ix$.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

1. Facile!!!

Il faut bien comprendre comment on place le point M d'affixe $e^{i\theta}$ en regardant l'angle entre la demi droite $\mathbb{R}^+$ et la demi droite $[OM]$.

2. Il faut faire des dessins!!!!

> Avec le dessin, on a facilement

$$12 = 12e^{i0}, \quad -4 = 4e^{i\pi}, \quad -2i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

> $A = 1 + i = re^{i\theta}$?

On commence par $r = |A| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

Ainsi $\frac{1+i}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ est complexe de module 1,

On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta = \pi/4$

$$\text{On trouve } \frac{1+i}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Conclusion : } 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

> $A = \frac{-\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = re^{i\theta}$?

On commence par $r = |A| = \left| \frac{-\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \right| = \dots = \sqrt{2}$

Ainsi $\frac{A}{|A|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ est complexe de module 1,

On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta = -2\pi/3$

$$\text{On trouve } \frac{A}{|A|} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Conclusion : } \frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = r e^{i\theta} = \sqrt{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

3. On utilise $\rho e^{i\varphi}$ et le formulaire sur les puissances

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i-1} = \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4})}$$

$$\frac{1}{1+i\tan x} = \frac{1}{1+i\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+i\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{i(\frac{\pi}{2}-x)}}$$

$$\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 = \left(r e^{i\theta}\right)^7 = r^7 e^{i7\theta}$$

$$\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{1492} = \left(\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}\right)^n$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

$$\text{On a : } \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \text{Argument moitié}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{e^{i\theta/2} [-2i \sin(\theta/2)]} \\ &= \frac{i e^{-i\theta/2}}{2 \sin(\theta/2)} \\ &= \frac{i [\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)]}{2 \sin(\theta/2)} \\ &= \frac{\sin(\theta/2) + i \cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{\cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}} &= \text{argument moitié} \\ &= \frac{e^{in\theta/2} [\dots\dots]}{e^{i\theta/2} [\dots\dots]} \\ &= e^{i(n-1)\theta/2} \frac{-2i \sin(n\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} \\ &= i \frac{-\sin(n\theta/2)}{\cos(\theta/2)} [\cos(\square) + i \sin(\square)] \\ &= \underbrace{\frac{\sin(n\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \sin(\square)}_{\text{Partie réelle}} - i \frac{\sin(n\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \cos(\square) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) On suppose $|z|=1$ et $|z'|=1$

On va montrer que : $\frac{z+z'}{1+z.z'} \in \mathbb{R}$.

Comme $|z| = 1$ et $|z'| = 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \frac{z+z'}{1+z.z'} &= \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i\theta}.e^{i\theta'}} \\ &\quad \text{Argument moitié} \\ &= \frac{e^{i\theta/2} e^{i\theta'/2}}{\underbrace{e^{i(\theta+\theta')/2}}_{=1}} \left(\begin{array}{l} \text{moche} \\ \text{Pas b\^o} \end{array} \right) \\ &= 1 \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

Correction 1 : On va utiliser $e^{i\theta}$ et l'argument moitié.

Comme $|a| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$.

De même comme $|b| = 1$ alors il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta'}$.

$$\text{Ainsi on a } \frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i\theta} e^{i\theta'}}$$

Argument moitié

$$= \frac{e^{i\theta/2} e^{i\theta'/2} [\dots]}{e^{i(\theta+\theta')/2} [\dots]} = \dots = \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

Correction 2 : On va utiliser $e^{i\theta}$ et le couple Complexe-Conjugué.

On sait que : $A \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(A) = 0 \iff \frac{A - \bar{A}}{2i} = 0 \iff \bar{A} = A$

De plus comme $|a| = 1$ et $|b| = 1$ alors il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\theta'}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \bar{A} &= \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab} \right)} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}\bar{b}} \\ &= \frac{\overline{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}}{1 + \overline{e^{i\theta} e^{i\theta'}}} \\ &= \frac{e^{-i\theta} + e^{-i\theta'}}{1 + e^{-i\theta} e^{-i\theta'}} \end{aligned}$$

On élève les puissances < 0

On simplifie les fractions

$$= \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i\theta} e^{i\theta'}} = A$$