TD 2 Complexes.

Vendredi 11 Septembre 2026.

Exercice 1. En utilisant l'angle moitié, déterminer $\text{Re}\left(\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$

Exercice 2. On a les formules suivantes $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$
$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$

1. Calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ en fonction de $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$
2. Recopier et finir le calcul
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \text{Re}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)\\ &= \text{Re}\left(e^{i2x}\right)\\ &= \text{Re}\left(e^{ix}\right)^2\\ &= \text{Re}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^2\\ &= \textit{On développe et on extrait la partie réel}\end{aligned}$$
Conclusion : On vient de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\textit{à compléter}}$
3. Recopier et finir le calcul
$$\begin{aligned}\cos^2(a) &= \left[\cos(a)\right]^2\\ &= \left[\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right]^2\\ &= \textit{On développe et on extrait la partie réel}\end{aligned}$$
Conclusion : On vient de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\textit{à compléter}}$

Exercice 3. [Correction] Soit les complexes $Z_1 = 1 - i$ et $Z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)$. On considère $Z = \dfrac{Z_2}{Z_1}$

1. Donner la forme algébrique du complexe Z.
2. Mettre le complexes Z_1, Z_2 sous forme circulaire.
En déduire la forme circulaire du complexe Z.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 4.

1. Soit le complexe $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
Placer approximativement les complexes ω, ω^2, ω^3 et ω^4 dans le plan complexe.
Calculer ω^5.
2. On pose $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
   (a) D'une part : calculer S en utilisant la formule de somme géo.
   (b) D'autre part : Déterminer un entier α tel que : $S = 1 + \alpha\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \alpha\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$
   (c) En utilisant l'exercice 1, montrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est une racine du polynôme $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$,
   (d) Donner une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Révision

Exercice 5. On considère la suite $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$

Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ puis vérifier que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$

Déterminer le signe $u_{n+1} - u_n$.