TD 3 Inégalité(s).

Vendredi 18 Septembre 2026.

1-ième heure.

Exercice 1. [Correction] *Les deux questions se résolvent de la même façon donc on n'en fait une seule*

1. **Pour les garçons.** Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$
2. **Pour les filles.** Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\geqslant \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 2. Encadrer,sur $[-1,1]$, rapidement , *CàD Wikking*, puis plus finement , *CàD étude de fonction*, les expressions suivantes

$$x^2-x+1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x+2}{x^2+1}$$

Exercice 3. Majorer rapidement , *CàD Wikking*, $|h(t)|$ sur $[0,1]$

(1) $h(t)=e^{-2t}$

(2) $h(t)=\frac{\sqrt{2-t}}{t-3}$

(3) $h(t)=t\ln(1+t)$

(4) $h(t)=\frac{\ln(1+t)}{1+t}$

(5) $h(t)=\sin(t^2)$

(6) $h(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Exercice 4. [Correction] Montrer que : $\forall\ x\in[1,2],\ \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\leqslant\sqrt{2}$

Exercice 5. [Correction] Montrer, *en cheminant*, que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$

2-ième heure.

Exercice 6. [Correction] Soit la suite (x_n) définie par $x_0=4$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=\frac{2(x_n)^2-3}{x_n+2}$

1. (a) Étudier, sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+$, la fonction $f:x\longmapsto\frac{2x^2-3}{x+2}$
   (b) En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x_n\geqslant 3$.
2. (a) Voir que (x_n-3) se factorise dans $x_{n+1}-3$
   (b) En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}-3\geqslant\frac{3}{2}(x_n-3)$.
3. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x_n\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n+3$.
4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

Exercice 7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$

$$\text{et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)=f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$
   et que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$.
2. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \sqrt{2}\leqslant u_n\leqslant 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Méthode 1. En montrant, *sans récurrence*, que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\leqslant 0$
   (b) Méthode 2. En montrant, *par récurrence*, que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leqslant u_n$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ℓ.
   On sait/admet que $f(\ell)=\ell$. Déterminer ℓ
5. Étude de $|u_n-\ell|$, la distance entre u_n et ℓ
   (a) Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\ell|\leqslant\frac{1}{2}|u_n-\ell|$.
   (b) En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |u_n-\ell|\leqslant\frac{1}{2^n}$.

Plus difficile

Exercice 8. [Correction] Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$

Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = F_0.F_1 \cdots F_{n-1} + 2$.

Exercice 9. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

Rappel : on utilisera la phrase : " J'applique l'inégalité avec ...

Exercice 10. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$
2. En déduire (difficile) que : $\forall\, x > 0,\ 1 + x^{1492} \geqslant \frac{(2x)^{1491}}{(1+x)^{1490}}$

Indication : C'est le 2-ième temps de la valse.
Comment faire apparaitre, (et minorer), $1 + x^{1492}$, à l'aide de la question précédente ?
Comment faire apparaitre, (et ....), $(1+x)^{1490}$, à l'aide de la question précédente ?
Mélanger les infos

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On fait par récurrence (simple)

$$H_{<n>} : 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Initialisation.

On a bien $1 \leqslant 2-\frac{1}{1}$;, donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité.

On suppose que $H_{<n>}$ est vraie,

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}$

On y va brutalement .

$$\begin{aligned} Gauche &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad \text{On applique brutalement } H_{<n>} \\ &\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} = 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} = \text{Intermédiaire} \end{aligned}$$

On va montrer directement que : $Intermédiaire \leqslant Final$

$$\begin{aligned} Final - Intermédiaire &= 2-\frac{1}{n+1}-\left(2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n+1)-n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Montrer que : $\forall\ x \in [1,2],\ \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqslant \sqrt{2}$

Pour tout $x \in [1,2]$, on a : $\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(2x-1)-x^2}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2}\sqrt{2x-1}+x\right)} \\ &= \frac{-x^2+4x-2}{Bas>0} \end{aligned}$$

Comme $\Delta = b^2-4ac = 16-4(-1)(-2) = 8$, il a 2 racines dans $\mathbb{R}$

$r = \frac{-4+\sqrt{8}}{-2} = 2-\sqrt{2} \approx 0.6$ et $r' = \frac{-4-\sqrt{8}}{-2} = 2+\sqrt{2} \approx 3.4$

et on a la factorisation : $-x^2+4x-2 = -(x-r)(x-r')$

On fait le bô tableau

Conclusion : $\forall\ x \in [1,2],\ \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqslant \sqrt{2}$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Montrer, *en cheminant*, que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\ldots)^2-(\ldots)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. (a) Étudier, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3}{x+2}$

   $>$ La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$.

   $>$ $\forall\, x \geqslant 0,\ f'(x) = \dfrac{(4x)(x+2)-(2x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+8x+3}{Bas>0} > 0$ car $x \geqslant 0$

   $>$ D'où le tableau

   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : x_n \geqslant 3$

   Initialisation $n = 0$.

   Comme $x_0 = 4 \geqslant 3$, $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose que $H_{<n>}$

   On a $\left.\begin{array}{r} x_n \geqslant 3 \\ \text{la fonction } f \text{ est croissante} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} \geqslant \underbrace{f(3)}_{=3}$

   Conclusion : $x_{n+1} \geqslant 3$ et $H_{<n+1>}$ est vraie

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.

   Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 3 &= \frac{2(x_n)^2-3}{x_n+2} - 3 \\ &= \frac{(2(x_n)^2-3)-3(x_n+2)}{x_n+2} \\ &= \frac{2(x_n)^2-3x_n-9}{x_n+2} \\ &= \frac{(x_n-3)(2x_n+3)}{x_n+2} \end{aligned}$$

   De plus $\dfrac{2x_n+3}{x_n+2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2(2x_n+3)-3(x_n+2)}{2(x_n+2)} = \dfrac{x_n}{x_n+2} \geqslant 0$ car $x_n \geqslant 3 \geqslant 0$

   Conclusion : $x_{n+1} - 3 = (x_n-3)\dfrac{2x_n+3}{x_n+2} \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n-3)$

3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$

   Initialisation $n = 0$.

   Comme $x_0 = 4 \geqslant 3$, $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose que $H_{<n>}$

   On a : $x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$

   On applique $H_{<n>}$

   $= \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

   Conclusion : On ré-organise ainsi : $x_{n+1} \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$ et $H_{<n+1>}$ est vraie

4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

   Comme $x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$ et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   Conclusion : la suite (x_n) diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$
Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = F_0.F_1 \cdots F_{n-1} + 2$.

On utilisera $\left[2^{2^n}\right]^2 = 2^{2^n \times 2} = 2^{2^{n+1}}$

On fait par récurrence $H_{<n>}$: $F_n = F_0.F_1 \cdots F_{n-1} + 2$

Initialisation (n=1). On a

$G = F_1 = \cdots$ et $D = F_0 + 2 = \cdots$

Donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $F_{n+1} = F_0.F_1 \cdots F_n + 2$

On chemine de Gauche à droite

$$
\begin{aligned}
F_0.F_1 \cdots F_n + 2 &= F_0.F_1 \cdots F_{n-1} F_n + 2 \\
&\quad \textit{On applique } H_{<n>} \\
&\quad \textit{CàD } F_0.F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2 \\
&= (F_n - 2)\, F_n + 2 \\
&= \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 + 2 \\
&= 2^{2^n.2} + 1 \\
&= 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1} \quad Fini
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. On a $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1)$ on continue "facilement" avec les intégrales.

   Il y a quand même une petite subtilité si $-1 < x \leqslant 0$ car les bornes sont décroissantes

   $$x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Soit $n > 0$ fixé.

   > On va montrer $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

   On y va direct

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a^{bouge} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

   On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = \frac{1}{n} > 0$

   $$\leqslant e^{n\frac{1}{n}} = e$$

   > On va montrer $e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

   On suit la même démarche

   $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = a^{bouge} = e^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{+0-B}$$

   Pour minorer A-B,

   on minore +A et majore -B

   On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = -\frac{1}{n} > -1$

   ainsi $\ln(1-\frac{1}{n}) \leqslant -\frac{1}{n}$

   $$\geqslant e^{-n\left(-\frac{1}{n}\right)} = e$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. Pour tout $x>0$,
$$1-\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=\frac{1+x-2\sqrt{x}}{1+x}=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{1+x}>0 \text{ fini}$$
2. Il y a plusieurs étapes
   - $>$ D'une part.
     J'applique l'égalité avec x^{1492}, ainsi $\frac{2\sqrt{x^{1492}}}{1+x^{1492}}\leqslant 1 \iff 1+x^{1492}\geqslant 2x^{746}$
   - $>$ D'autre part.
     On élève puissance 1490 l'inégalité précédente, c'est valise car tout est >0.
     Ainsi on a $\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^{1490}\leqslant 1^{1490} \iff \frac{2^{1490}x^{745}}{(1+x)^{1490}}\leqslant 1$
   - $>$ Conclusion : $1+x^{1492}\geqslant 2x^{746}$
$$\begin{aligned}&\geqslant 2x^{746}\,\frac{2^{1490}x^{745}}{(1+x)^{1490}}\\&\geqslant \frac{(2x)^{1491}}{(1+x)^{1490}}\end{aligned}$$