DM 3

Exercice 1. [Correction]

1. Monter que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$
2. Application 1 : En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

   Rappel : $a^{bouge} = e^{b\ln(a)}$
3. Application 2 : En déduire que : $\forall\, x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$

Exercice 2. [Correction] *Les deux questions se résolvent de la même façon donc on n'en fait une seule*

1. **Pour les filles.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1^2} + +\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
2. **Pour les garçons.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 3. [Correction] Soit la suite (x_n) définie

$$\text{par } x_0 = 4 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{2\,(x_n)^2 - 3}{x_n + 2}$$

1. (a) Étudier, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$, la fonction $f : x \longmapsto \frac{2\,x^2 - 3}{x+2}$

   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.
2. (a) Voir que $(x_n - 3)$ se factorise dans $x_{n+1} - 3$

   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

Exercice 4. [Correction] Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un complexe. On va montrer que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^* \iff \left[z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z| = 1\right]$$

1. Sens $\Longleftarrow$
   (a) On suppose que $z \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$
   (b) On suppose que $|z| = 1$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$

   Conclusion : On a bien montré $\Longleftarrow$
2. Sens $\Longrightarrow$.
   On suppose que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$
   (a) Montrer que : $z^2\overline{z} + \overline{z} - z\overline{z}^2 - z = 0$
   (b) Finir la factorisation : $z^2\overline{z} + \overline{z} - z\overline{z}^2 - z = (z - \overline{z})\,[.....]$
   (c) En déduire que : $z \in \mathbb{R}^*$ ou $|z| = 1$

   Conclusion : On a bien montré $\Longrightarrow$
3. Application

   Dans toute la suite, on considère deux nombres complexes non nuls a et b.
   On note (E) l'équation $z^2 - 2az + b = 0$.
   On note $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ les racines complexes (éventuellement égales) de (E) que l'on donne également sous forme trigonométrique.
   (a) Démontrer que $z_1 + z_2 = 2a$ et $z_1 z_2 = b$.
   (b) On suppose $|z_1| = |z_2|$.

   $>$ Mettre le complexe $\frac{a^2}{b}$ sous forme trigonométrique.

   $>$ En déduire que $\frac{a^2}{b}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1]$.

   (c) On suppose que $\frac{a^2}{b}$ est un réel et on note $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

   Justifier que la quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe et est réelle.

   Montrer que : si $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$ alors $|z_1| = |z_2|$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. Monter que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$

C'est une inégalité classique de convexité ! ! ! Rédaction type

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est concaves sur $\mathbb{R}_+$, ainsi on a

$$\forall, x > 0,\ \ln(1+x) \leqslant \underbrace{x}_{\text{Eq de la tgt en } 0}$$

2. Application 1 : En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

On chemine : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[x \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

On applique Q1 avec $x = {}^1\!/_n > 0$

$\leqslant \exp\left[n.\frac{1}{n}\right] = e^1 \approx 2.7 \leqslant 3$ Yes

3. Application 2 : En déduire que : $\forall\, x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$

On chemine : Pour tout $x > 0$, on a $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

On applique Q1 avec ${}^1\!/_x > 0$

$\leqslant \frac{1}{x}$ Yes

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1^2} + +\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$

On fait par récurrence (simple)

$$H_{<n>} : 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Initialisation.

On a bien $1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$;, donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité.

On suppose que $H_{<n>}$ est vraie,

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + +\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$

On chemine $Gauche\ = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

On applique $H_{<n>}$

$\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} =$ Intermédiaire

On va montrer : $Intermédiaire \leqslant\ Final$

$$Final\ -\ Intermédiaire = 2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right)$$
$$= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{(n^2+n+1) - n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. (a) Étudier, sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2\,x^2 - 3}{x+2}$

   $>$ La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$.

   $> \forall\, x \geqslant 0,\ f'(x) = \dfrac{(4x)(x+2) - (2x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+8x+3}{Bas > 0} > 0$ car $x \geqslant 0$

   $>$ D'où le tableau

   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : x_n \geqslant 3$

   Initialisation $n = 0$.

   Comme $x_0 = 4 \geqslant 3$, $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose que $H_{<n>}$

   On a $x_n \geqslant 3$
   la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ $\Big\} \Longrightarrow \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} \geqslant \underbrace{f(3)}_{=3}$

   Conclusion : $x_{n+1} \geqslant 3$ et $H_{<n+1>}$ est vraie

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.

   Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 3 &= \frac{2\,(x_n)^2 - 3}{x_n + 2} - 3 \\ &= \frac{(2\,(x_n)^2 - 3) - 3(x_n+2)}{x_n+2} \\ &= \frac{2\,(x_n)^2 - 3x_n - 9}{x_n+2} \\ &= \frac{(x_n-3)(2x_n+3)}{x_n+2} \end{aligned}$$

   De plus $\dfrac{2x_n+3}{x_n+2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2(2x_n+3) - 3(x_n+2)}{2(x_n+2)} = \dfrac{x_n}{x_n+2} \geqslant 0$ car $x_n \geqslant 3$

   Conclusion : $x_{n+1} - 3 = (x_n - 3)\dfrac{2x_n+3}{x_n+2} \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$

3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$

   Initialisation $n = 0$.

   Comme $x_0 = 4 \geqslant 3$, $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité On suppose que $H_{<n>}$

   On a : $x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$

   On applique $H_{<n>}$

   $= \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

   Conclusion : On ré-organise ainsi : $x_{n+1} \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$ et $H_{<n+1>}$ est vraie

4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

   Comme $x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$ et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   Conclusion : la suite (x_n) diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Sens $\Longleftarrow$

   (a) On suppose que $z \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$

   Comme $z \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$ et $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$ Fini

   (b) On suppose que $|z| = 1$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$

   Comme $|z| = 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$.

   Ainsi on a : $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}$
   $= e^{i\theta} + e^{-i\theta}$
   $= (C + iS) + (C - iS)$

   Conclusion : $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \in \mathbb{R}$ Fini

2. Sens $\Longrightarrow$. On suppose que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$

   (a) Montrer que : $z^2\overline{z} + \overline{z} - z\overline{z}^2 - z = 0$

   On sait que : $A \in \mathbb{R} \iff \overline{A} = A$, ainsi on a

   $$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^* \implies \overline{z + \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z}$$
   $$\implies \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$$
   On ré-organise
   $$\implies z^2\overline{z} + \overline{z} - z\overline{z}^2 - z = 0$$

   (b) Finir la factorisation

   On a $z^2\overline{z} + \overline{z} - z\overline{z}^2 - z = (z - \overline{z})\,[z\overline{z} - 1]$

   (c) En déduire que : $z \in \mathbb{R}^*$ ou $|z| = 1$

   On sait que : $(z - \overline{z})\,[z\overline{z} - 1] = 0 \iff \underbrace{(z - \overline{z}) = 0}_{\text{CàD } z \in \mathbb{R}}$ *ou* $\underbrace{[z\overline{z} - 1] = 0}_{\text{CàD } |z| = 1}$

   Conclusion : $z \in \mathbb{R}^*$ ou $|z| = 1$

3. Application

   Dans toute la suite, on considère deux nombres complexes non nuls a et b.
   On note (E) l'équation $z^2 - 2az + b = 0$.
   On note $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ les racines complexes (éventuellement égales) de (E) que l'on donne également sous forme trigonométrique.

   (a) Démontrer que $z_1 + z_2 = 2a$ et $z_1 z_2 = b$.

   Comme z_1 et z_2 sont les racines, on sait que : $z^2 - 2az + b = 1(Z - z_1)(Z - z_2)$
   De plus on a : $(Z - z_1)(Z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)Z + z_1 z_2$

   Par unicité des coef, on a : $z_1 + z_2 = 2a$ et $z_1 z_2 = b$

   (b) On suppose $|z_1| = |z_2| = r$.

   Mettre le complexe $\frac{a^2}{b}$ sous forme trigonométrique. En déduire que $\frac{a^2}{b}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1]$.

   On a $\frac{a^2}{b} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{4\,z_1 z_2} = \frac{\left(r.e^{i\theta_1} + re^{i\theta_2}\right)^2}{4.r.e^{i\theta_1}.re^{i\theta_2}}$
   $$= \frac{\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\left[2\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right]\right)^2}{4.e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$
   $$= \cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

   Conclusion : $\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$ est un réel de l'intervalle $[0, 1]$ et $\neq 0$ car $a, b \neq 0$

   Donc $\frac{a^2}{b}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1]$.

(c) On suppose que $\frac{a^2}{b}$ est un réel et on note $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

Justifier que la quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe et est réelle.

> La quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe car z_1 et z_2 sont $\neq 0$ (car $z_1.z_2 = b \neq 0$)

> On a $Z + \frac{1}{Z} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1.z_2}$

$$= \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2}{z_1.z_2} = \frac{4a^2 - 2b}{b} = 4\frac{a^2}{b} - 2$$

Conclusion : Comme $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$, on a bien la quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe et est réelle.

Montrer que : si $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$ alors $|z_1| = |z_2|$.

On suppose que $a^2/b \in]0, 1]$, CàD $a^2/b \in \mathbb{R}$ et $a^2/b \in]0, 1]$

Comme $a^2/b \in \mathbb{R}$, on vient de voir que : $Z + \frac{1}{Z} \in \mathbb{R}^*$

D'après la question Q2, on a donc $Z \in \mathbb{R}$ ou $|Z| = 1$

Situation $Z \in \mathbb{R}^*$.

On étudie la fonction $h : Z \longmapsto Z + \frac{1}{Z}$

On constate que : $|f(Z)| \geqslant 2$.

De plus $a^2/b \in]0, 1]$, donc $|f(Z)| = 2$, CàD $Z = 1$ ou $Z = -1$

Conclusion : $z_1 = \pm z_2$ et $|z_1| = |z_2|$.

Situation $|Z| = 1$.

Comme $|Z| = 1$, on peut écrire $Z = e^{i\alpha}$

Conclusion : $z_1 = e^{i\alpha} z_2$ et $|z_1| = |z_2|$.