Les inégalités.

1 Premier temps de la valse 1
- 1.1 Kulture. . . . 1
- 1.2 Viking. . . . 1
- 1.3 Transfert avec une fonction (dé)croissante 2
- 1.4 Gros-Petit 2
- 1.5 Récurrences. . . . 2

2 Deuxième temps de la valse 2

3 Valeurs Absolues, mon amie. 2
- 3.1 Définition et Propriétés. . . . 2
- 3.2 Fonctions lipschitziennes. . . . 3

4 Exercices 4

L'objectif est de démontrer $A \leqslant B$ ou $A = B$

1 Premier temps de la valse

1.1 Kulture.

> Kulture de base

On sait que : $\forall\ \square \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin\square \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos\square \leqslant 1$

> Convexité

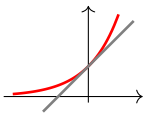
Soit f une fonction définie, continue dérivable de $\mathscr{D} = [a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On suppose que $f'' \geqslant 0$ sur $\mathscr{D}$ alors f est convexe,

$$\text{CàD } \forall x \in \mathscr{D},\quad \underbrace{Tangente}_{} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{Corde}_{}$$

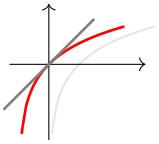
Applications.

> La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ainsi



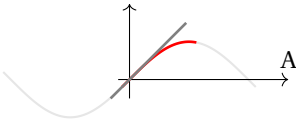
$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R},\quad \underbrace{1+x}_{Tangente} \leqslant e^x$$

> La fonction $\ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ ainsi



$$\text{Ainsi } \forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant \underbrace{x}_{Tangente}$$

> La fonction $Sinus$ est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ainsi



$$\text{Ainsi } \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \underbrace{\frac{2}{\pi}.x}_{Corde} \leqslant \sin(x) \leqslant \underbrace{x}_{Tangente}$$

1.2 Viking.

> Comme en terminale

> Pour majorer $A-B$, on majore A et on minore B.

$$\left.\begin{array}{l} m_A \leqslant A \leqslant M_A \\ m_B \leqslant B \leqslant M_B \end{array}\right\} \Longrightarrow A - B \leqslant M_A - m_B$$

> Pour majorer A/B , on majore A et on minore B.

$$\left.\begin{array}{l} m_A \leqslant A \leqslant M_A \\ 0 < m_B \leqslant B \leqslant M_B \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{A}{B} \leqslant \frac{M_A}{m_B}$$

1.3 Transfert avec une fonction (dé)croissante

On utilise

$$\left.\begin{array}{c}\forall\, x\in[a,b]\\ f \text{ est croissante sur } [a,b]\end{array}\right\} \Longrightarrow f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$$

1.4 Gros-Petit

Il y a 2 possibilité

> Gros-Petit = FFB puis on fait un bô tableau de signe

> On étudie la fonction $h : x \longmapsto$ Gros -petit

1.5 Récurrences.

2 Deuxième temps de la valse

Théorème 1. On chemine

On chemine de Gauche vers droite, on chemine de compliquer vers simple

Lorsqu'on démontre une inégalité par récurrence, on chemine ....

Lorsqu'on démontre doit utiliser plusieurs inégalités, on chemine ....

3 Valeurs Absolues, mon amie.

3.1 Définition et Propriétés.

Définition 2. Définition de $|x|$.

Soit x un réel.
Il existe plusieurs façons *équivalentes* de définir/calculer le nombre $|x|$.

> Simplification.

On a $|x| = \left\{\begin{array}{ll} = +x & \textit{Lorsque } x\geqslant 0\\ = -x & \textit{Lorsque } x\leqslant 0\end{array}\right.$

> Majoration/Encadrement.

$|x|$, c'est le plus grand entre $+x$ et $-x$.
Ainsi on a : $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

> Distance.

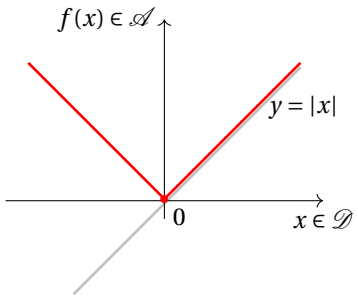
$|x| = |x-0|$, c'est la distance de x à 0.

Graphe.

La fonction Valeur Absolue $x \longmapsto |x|$

> est définie et continue sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
> est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^*$.

La fonction Valeur Absolue n'est pas dérivable en 0.



Théorème 3. Formulaire.
Soit x, x', a des réels.

Kulture.
Les valeurs absolues se simplifient sauf si ....

> **Positivité** $|x|$ est un réel $\geqslant 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

> **Calcul**

$$|-x| = |x| \text{ et } |x.x'| = |x|\,|x'| \text{ et Si } x' \neq 0,\ \left|\frac{x}{x'}\right| = \frac{|x|}{|x'|}$$

Attention au piège. $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$

> **Symétrie** $|a - x| = |x - a|$.

> **L'inégalité triangulaire**

$$|2x + 3x'| \leqslant 2|x| + 3|x'| \quad et \quad |2x - 3x'| \leqslant 2|x| + |3x'|$$

3.2 Fonctions lipschitziennes.

Définition 4.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est k-lipschitzienne Ssi $\forall\ x, x' \in I,\ |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|$

Théorème 5.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall\ t \in I,\quad |f'(t)| \leqslant k \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ \text{CàD } \forall\ x, x' \in I,\ |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'| \end{array}$$

4 Exercices

Le premier temps de la valse

Exercice 1. Proposer un encadrement pour les quantités suivantes

> $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-\sqrt{2-x}+3}$ pour $x\in[-1,1]$

> $\dfrac{x-y^2+3}{x^2+y^2-y}$ pour $x,y\in[1,2]$ puis pour $x,y\in[-2,-1]$

Exercice 2.

1. Montrer que : $\forall\, x\in[1,3],\ 1\leqslant\dfrac{3x+1}{x+1}\leqslant 5$.
2. Montrer plus précisément que : $\forall\, x\in[1,3],\ 2\leqslant\dfrac{3x+1}{x+1}\leqslant\dfrac{5}{2}$

Exercice 3. Majorer $h(t)$ sur $[0,1]$

(1) $h(t)=e^{-2t}$ (4) $h(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$

(2) $h(t)=\dfrac{\sqrt{2-t}}{3-t}$ (5) $h(t)=\sin(t^2)$

(3) $h(t)=t\ln(1+t)$ (6) $h(t)=\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Exercice 4. Montrer que

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0,\ u_1=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$
   Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant 3^n$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}+\ldots+u_1+u_0$
   Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant 2^n$

Exercice 5. Montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 6. [Correction] Montrer que :

$$\forall\ x\in[0,1],\ 0\leqslant x(1-x)\leqslant {}^1\!/_4$$

Exercice 7. [Correction] Montrer que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{1}{2}x$$

Exercice 8. Montrer que : $\forall\, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin(x)\leqslant x$

Exercice 9. [Correction] Montrer que :

$$\forall x\geqslant 0,\quad \frac{\sqrt{x}}{1+x}\leqslant\frac{1}{2}$$

Exercice 10. [Correction] Montrer que :

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}_+,\quad ab\leqslant b\ln b+e^{a-1}$$

Exercice 11. [Correction] Soit a,b deux réels positifs. Montrer que

$$\frac{2}{{}^1\!/_a+{}^1\!/_b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Exercice 12. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=u_1=1 \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=(n+1)(u_{n+1}+u_n)$$

Monter que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=n!$

Exercice 13. [Correction] Montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \text{ et } \forall\, x\geqslant 0\quad (1+x)^n\geqslant 1+nx$$

Exercice 14. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, x\in[0,1],\ (1-x)^n\geqslant 1-nx$
2. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, x\in[0,1],\ (1-x)^n\leqslant\dfrac{1}{1+nx}$

Exercice 15. [Correction] Montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{1^2}++\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Exercice 16. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 17. [Correction] Montrer que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall\ t\geqslant 1,\quad t^n-1\leqslant nt^{n-1}(t-1).$$

On cheminera du petit vers le gros et on notera que 1 est une racine évidente.

Le deuxième temps de la valse

Exercice 18. Une jolie inégalité.

1. Monter que :$\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

Exercice 19.

1. Monter que :$\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$

Exercice 20. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2$

$$\text{et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. *Bonus* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 21. Soit la suite (x_n) définie

$$\text{par } x_0 = 4 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{2(x_n)^2 - 3}{x_n + 2}$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

Exercice 22. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, x, y \geqslant 0,\ \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$
2. En déduire que : $\forall a, b, b \geqslant 0,\ a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$

Exercice 23. [Correction] Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On note $s = x+y+z$

1. Un première minoration Montrer que : $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

   En déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 6 - s$
2. Un deuxième minoration
   (a) Montrer que : $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

   En déduire que : $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$

   (b) Développer $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

   En déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{s}$
3. Laquelle des deux minorations est-elle la meilleur ?

Bonus

Exercice 24. Soient a, b des réels tels que $a+b$ et ab soient entiers.

Montrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^n + b^n$ est un entier.

Remarque : Les nombres a et b ne sont pas forcément entier. Par exemple Si $a = 1+\sqrt{2}$ et $b = conjugé = 1-\sqrt{2}$.

Exercice 25. Montrer par récurrence que $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un polynôme en $\square = x + \frac{1}{x}$

Valeur Absolue

Exercice 26. [Correction] Simplifier les valeurs absolues suivantes

$$\left|\ln\left(\frac{7}{11}\right)\right|, \quad \left|e^{1/3} - e^{-1/3}\right|, \quad \left|\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right|$$

Exercice 27. [Correction] On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Déterminer $\mathscr{D}_f$ et simplifier $|f'(t)|$ sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice 28. [Correction] Simplifier $\sqrt{1+\cos(2x)}$ pour $x \in [0, 2\pi]$

Exercice 29. [Correction]

1. Montrer que $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ |x+y+z| \leqslant |x| + |y| + |z|$.
2. Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x - y|$.

Exercice 30. Donner le graphe des fonctions

$$f : x \longmapsto |x-2| + 2|x+3| \text{ et } g : x \longmapsto \Big|x - 2 + 2|x+3|\Big|$$

Fonction Lipschitzienne

Exercice 31. [Correction] Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$

Exercice 32. Pour les expression suivante : Calculer, simplifier et encadrer $\left|h'(t)\right|$ sur $[0,1]$. En déduire que h est lipschitzienne.

$> h(t) = e^{-2t}$.

$> h(t) = \sqrt{2-t}$.

$> h(t) = t\ln(1+t)$.

$> h(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.

$> h(t) = \sin(t^2)$.

$> h(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Exercice 33. On considère la fonction f définie par : $\forall\, x \neq 0,\ f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{2}{t}\right)$

Montrer que la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

Exercice 34. On considère la fonction f de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

1. Sur $[0,1]$; calculer et simplifier $\left|f'(t)\right|$

   En déduire que, sur $[0,1]$, la fonction f_n est $\dfrac{1}{n!}$-lipschitzienne.
2. En déduire que une majoration de $\left|f_n(1) - f_n(0)\right|$

   En conclure que : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$

Correction.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On fait Rapide/Lent comme Terminale : $\forall x \in [0,1]$, on a $x(1-x) \geqslant 0(1-1) = 0$.
Direct pour l'autre

$$\begin{aligned} G-p = \frac{1}{4} - x(1-x) = = & \frac{4x^2-4x+1+}{4} \\ = & \frac{Trinome}{4} \\ & \textit{comme } \Delta = 0, \textit{ le trinôme est un carré} \\ = & \frac{(2x-1)^2}{4} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On y va direct

$$\forall x > 0, \quad 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{(...)^2 - (...)^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{1+x}} = \frac{1/4\ x^2}{.... > 0} \geqslant 0$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) Direct

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)
On fixe une des 2 variables puis on fait une étude de fonction.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$?

On fait G-p

$$\begin{aligned} G-p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} = & \frac{(\square)^2 - (\heartsuit)^2}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}} \\ = & \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{Bas > 0} \\ = & \frac{a^2-2ab+b^2}{4.Bas > 0} \\ = & \frac{(a-b)^2}{4.Bas > 0} > 0 \end{aligned}$$

$\frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant \frac{a+b}{2}$?

On étudie la fonction $h : x \longmapsto \frac{a+x}{2} - \frac{x-a}{\ln(x)-\ln(a)}$

Rq : C'est la méthode "classique" lorsque l'on démontre une inégalité via une étude de fonction, Il se trouve que Ici la fonction est inadaptée et ne conclue pas voir DM

$\sqrt{ab} \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$?

On étudie la fonction $h : x \longmapsto \frac{x-a}{\ln(x)-\ln(a)} - \sqrt{ax}$

$\frac{2}{1/a + 1/b} \leqslant \sqrt{ab}$?

On fait G-p

$$\begin{aligned} G-p = \sqrt{ab} - \frac{2}{{}^1/_a + {}^1/_b} &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{(\square)^2 - (\heartsuit)^2}{\sqrt{ab} + \frac{2ab}{a+b}} \\ &= \frac{ab - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2}{Bas > 0} \\ &= \frac{ab(a+b)^2 - 4a^2b^2}{(a+b)^2.Bas > 0} \\ &= \frac{ab\left[(a+b)^2 - 4ab\right]}{(a+b)^2.Bas > 0} \\ &= \frac{ab\left[a^2 - 2ab + b^2\right]}{(a+b)^2.Bas > 0} \\ &= \frac{ab\,[a-b]^2}{(a+b)^2.Bas > 0} > 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé) On fait par récurrence (2 étages)

$$H_{<n>} : u_n = n!$$

Initialisation avec $n = 0$ et $n = 1$

Comme $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$, $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraie

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va monter $H_{<n+2>}$, CàD $u_{n+2} = (n+2)!$

On chemine

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)\,[u_{n+1} + u_n] \\ &\qquad \textit{On applique } H_{<n>} \textit{ et } H_{<n+1>} \\ &= (n+1)\left[(n+1)! + n!\right] \end{aligned}$$

Je finalise avec Final-Inter

$$(n+2)! - (n+1)\left((n+1)! + n!\right) = (n+1)n!\left((n+2) - (n+1) - 1\right) = \mathcal{O} \quad fini$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

On va montrer par récurrence $H_{<n>}$: $(1-a)^n \leqslant \frac{1}{1+na}$

> Initialisation.

On a $(1-a)^0 = 1$ et $\frac{1}{1+0a} = 1$ donc $H_{<0>}$ est vraie

> Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $(1-a)^{n+1} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}$

On y va brutal :

$$\forall\, a > 0, \quad (1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) \leqslant \frac{1}{1+na}(1-a) = Intermédiare$$

De plus

$$Final - Inter = \frac{1}{1+(n+1)a} - \frac{1-a}{1+na} = \frac{(1+na) - (1-a)(1+(n+1)a)}{....>}$$

$$= \frac{(n+1)a^2}{....>} > 0 \qquad Fini.$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) On fait par récurrence (simple)

$$H_{<n>} : 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Initialisation.

On a bien $1 \leqslant 2-\frac{1}{1}$;, donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité.

On suppose que $H_{<n>}$ est vraie,

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}$

On y va brutalement .

$$\begin{aligned} Gauche &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad \text{On applique brutalement } H_{<n>} \\ &\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} = 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} = \text{Intermédiaire} \end{aligned}$$

On va montrer directement que : $Intermédiaire \leqslant Final$

$$\begin{aligned} Final \ - \ Intermédiaire &= 2-\frac{1}{n+1}-\left(2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n+1)-n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

Pour tout $t \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} t^n-1 = a^n-b^n &= (a-b)[a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}] \\ &= (t-1)[t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1] \\ &\quad Or\ t \geqslant 1\ donc\ 1 \leqslant t \leqslant \cdots \leqslant t^{n-2} \leqslant t^{n-1} \\ &\leqslant (t-1)[t^{n-1}+t^{n-1}+\cdots+t^{n-1}+t^{n-1}] \\ &\leqslant (t-1)nt^{n-1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 22 (Énoncé)

1. Direct.
2. J'applique l'inégalité avec a,b avec b,c et avec c,a ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &\geqslant ab \\ \frac{b^2+c^2}{2} &\geqslant bc \\ \frac{c^2+a^2}{2} &\geqslant ca \end{aligned}$$

Puis on somme ces trois inégalités.

Solution de l'exercice 23 (Énoncé)

1. La première inégalité se fait "facilement" avec une méthode directe.
   Puis on applique cette inégalité avec x, y et z et on somme.
2. (a) La première inégalité se fait "facilement" avec une méthode directe.
   Puis on applique cette inégalité avec x,y, y,z et z,x et on fait le produit.

(b) On a

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}$$

$$\text{Or } \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \square+\frac{1}{\square} \geqslant 2$$

$$\geqslant 3+2+2+2 = 9$$

(c) On doit comparer $6-s$ et $\frac{9}{s}$. On le fait direct

$$6-s-\frac{9}{s} = \frac{-s^2+6s-9}{s} = \ominus\frac{(s-3)^2}{s} \leqslant 0$$

Ainsi on a toujours $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{s} \geqslant 6-s$ ainsi l'inégalité de la question 2 est meilleur.

Solution de l'exercice 26 (Énoncé) On a

Comme $0 \leqslant \frac{7}{11} < 1$, on a $\left|\ln\left(\frac{7}{11}\right)\right| = -\ln\left(\frac{7}{11}\right)$

Comme la fonction exp est croissante, on a $\left|e^{1/3} - e^{-1/3}\right| = e^{1/3} - e^{-1/3}$

Sachant que $\pi \leqslant \frac{8\pi}{7} \leqslant 2\pi$ et avec un bô dessin, on a $\left|\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right| = -\sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{\pi}{7})$

Solution de l'exercice 27 (Énoncé)

On sait que : $x \in \mathscr{D}_f$ Ssi on peut calculer $f(x)$. Ainsi $\times \in \mathscr{D}_f$ Ssi $x^2-3x+2>0$ On factorise le trinôme avec Δ et on trouve $x^2-3x+2 = 1(x-1)(x-2)$.

Avec un bô tableau de signe, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty,1[\cup]2,\infty[$.

De plus $\forall x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$, ainsi

> Si $x \in]-\infty,1[$, $|f'(x)| = \frac{|3-2x|}{|1-x||2-x|} = \frac{3-2x}{(1-x)(2-x)}$

> Si $x \in]2,\infty[$, $|f'(x)| = \frac{|3-2x|}{|1-x||2-x|} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$

Solution de l'exercice 28 (Énoncé)

Soit $x \in [0,2\pi]$.

J'applique la formule avec $a=b=x$, ainsi $\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x) = \cos^2(x)-(1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x)-1$.

On a donc $\sqrt{1+\cos(2x)} = \sqrt{2\cos^2(x)} = \sqrt{2}|\cos(x)|$

> Si $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, on a $\sqrt{1+\cos(2x)} = +\sqrt{2}\cos(x)$

> Si $x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{1+\cos(2x)} = -\sqrt{2}\cos(x)$

Solution de l'exercice 29 (Énoncé)

1. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, on a

$$|x+y+z| = |x+\square| \leqslant |x|+|\square| \leqslant |x|+|y|+|z|$$

2. On fait deux situations selon que : $|x| \geqslant |y|$ ou $|x| \leqslant |y|$

> Situation $|x| \geqslant |y|$

On doit démontrer que : $\big||x|-|y|\big| = |x|-|y| \leqslant |x-y| \iff |x| \leqslant |x-y|+|y|$.

On a : $|x| = |x-y+y| = |\square+y| \leqslant |\square|+|y| = |x-y|+|y|$

> Situation $|x| \leqslant |y|$

On fait de même

Solution de l'exercice 31 (Énoncé)

On montre que la fonction Sinus est 1-lipschitzienne et on applique l'inégalité avec 1 et x.