Les Sommes

1 Les Sommes classiques. 1

2 Opérations. 2
2.1 Opérations "simples". 2
2.2 Ré-indexation 3

3 Somme géométrique. 4

4 Dominos ou Somme Télescopique. 5

5 Somme du binôme. 6

6 Majorer/minorer/Encadrer une somme. 7

Théorème 1. Combien d'entier !

Il y a la formule générale

nbr de terme = Fin - Début +1

1 Les Sommes classiques.

On peut écrire une somme de deux façons différentes

> Présentation développée avec $\cdots$, CàD $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

> Avec le symbole $\sum$, CàD $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *ou* $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ *ou* $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j$ *ou* $\sum_{\ell \in \{1,2,\ldots,n\}} a_\ell$

Définition 2.

$\sum_{k=1}^{n}$ signifie : On somme de $k = 1$ à $k = n$

Dans une somme,

> il faut bien comprendre le rôle et le sens de l'indice **Fantôme** de sommation.

> Il faut être capable de jongler entre «Présentation développé» et «symbole $\sum$»

Exercice 1. [Correction] Écrire les sommes suivantes avec un symbole $\sum$ ou développer

$$S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$$
$$S_2 = 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + \cdots + 3^{2n-2}$$
$$S_3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{2018} \frac{1}{k^2} \qquad S_3' = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{2018} \frac{1}{k^2}$$
$$S_4 = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p}$$

Rappel : $\mathscr{P}$ c'est l'ensemble des nombres premiers

Exercice 2. [Correction] On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad et \quad V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Déterminer les signe de $U_{n+1} - U_n$ et de $V_{n+1} - V_n$.
2. Montrer que : $V_n - U_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2 Opérations.

2.1 Opérations "simples".

Théorème 3.
Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ et $b_0, b_1, ..., b_n$ des complexes, on a

> **Les sommes classiques**

$$1+1+1+...+1 = \textit{le nombre de plateau}$$
$$1+2+3+...+\square = \frac{\square(\square+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+...+\square^2 = \frac{\square(\square+1)(2\square+1)}{6}$$

> **Regrouper, distribuer.**

On peut regrouper et distribuer les sommes finies

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) \qquad et \qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

> **Factoriser.**

On peut factoriser.

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \underline{\textit{avec } \lambda \textit{ ne dépend pas de } k}$$

> **Disjonction pair-impair.**

On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \overset{def}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ tous}}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{n} a_k$$

avec $\sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{n} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + ...$ et $\sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{n} a_k = a_1 + a_3 + a_5 + ...$

Démonstration : Les démonstrations sont évidentes dès que l'on détaille les sommes sous forme développées

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = (a_0 + a_1 + ... + a_n) - (b_0 + b_1 + ... + b_n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + ... + (a_n - b_n) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + ... + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + ... + a_n) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ tous}}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n = (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

Exercice 3. [Correction] Calculer les sommes et les produits suivants

$$\sum_{k=1}^{n} k+1 \overset{def}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 1, \quad \sum_{k=1}^{n} (k+1), \quad \sum_{k=n}^{3n} (3k-1), \quad \sum_{i=0}^{n} i(i+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(2k.2^k\right), \quad \prod_{k=1}^{n} (-2)^k$$

Exercice 4. [Correction] On admet *dans cette exercice* que les sommes infinies se manipulent comme des sommes finies.
Sachant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $S_3' = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

2.2 Ré-indexation

Définition 4.

Une ré-indexation consiste à changer l'indice de sommation
mais la somme, elle, ne change pas.

Exemple.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère que $S = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

Je ré-indexe la somme avec $k = n+1-p$,

On sait que $S = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k$
et on remplace k par $n+1-p$, ainsi

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} \underbrace{k}_{\cdots\cdots} = \sum_{n+1-p=1}^{n+1-p=n} \underbrace{\cdots\cdots}_{k=n+1-p} = \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p)$$

$$\begin{aligned} \textit{Conclusion : } S &= \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k \\ &= \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p) \\ &\textit{On remet les bornes en croissant} \\ &= \sum_{p=1}^{n} (n+1-p) \end{aligned}$$

La ré-indexation est finie et le calcul se poursuit

$$\begin{aligned} S = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{p=1}^{n} (n+1-p) \\ &= \textit{ On distribue} \\ &= \sum_{p=1}^{n} (n+1) - \sum_{p=1}^{n} p \\ &\textit{On calcule les sommes} \\ &= (n+1) \times nbr\,de\,plateau - S \\ &\Longrightarrow 2S = (n+1)n \Longrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5. [Correction] Ré-indexation

1. Soit la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.
   Ré-indexer avec $k = n-p$ puis en déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$.
2. Soit la somme $B_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.
   Re-indexer avec $k = p+1$ puis en déduire la valeur de $B_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

3 Somme géométrique.

Théorème 5. L'indispensable formule des sommes géométrique

$$\text{Lorsque } \square \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \square^k = \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square}$$

Exercice 6. [Correction]

1. Calculer les sommes suivantes

$$1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n} \qquad 1-q+q^2-q^3+\cdots+(-1)^n q^n \qquad 1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots+2^n$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{n}\left(2^{2k+n}.3^{n-3k}\right), \quad 2^{n-1}+3^2.2^{n-2}+3^4.2^{n-3}+\ldots+3^{2n-2}$$

3. Calculer les produits suivants $\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right)$, $\prod_{k=1}^{n}(-2)^k$

Exercice 7. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Exercice 8. À l'aide des sommes géo, montrer que

$$\forall\ a,b \in \mathbb{C}, \ a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots.+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Exercice 9. [Correction] Rappel : On sait que $2017 = 7.10^0+1.10^1+0.10^2+2.10^3$

Calculer $\underbrace{11\cdots1}_{n\,fois}$ puis $1+11+111+1111+\ldots..+\underbrace{11\cdots1}_{n\,fois}$

Exercice 10. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}-\{1\}$. On va avec différentes méthodes, calculer $\sum_{k=0}^{n} kx^k$

1. Méthode 1. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.
2. Méthode 2. Finir le calcul suivant

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= 0+1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}\\ &= [x]'+\left[x^2\right]'+\left[x^3\right]'+\ldots..++\left[x^n\right]'\\ &= \ldots\ldots.\end{aligned}$$

3. Méthode 3. Re-indexer la somme avec $k = p+1$ puis conclure.

4 Dominos ou Somme Télescopique.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe a, b tel que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} - \dfrac{b}{k+1}$

Q2. En déduire la valeur de S_n.

Q3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle?

Théorème 6. Synthèse de la méthode.

$$S_n = \sum_{Début}^{fin} \underbrace{Plateau}$$

= On modifiie le plateau avec l'indication du texte.

= On détaille les "nouvô" plateaux

= *On simplifie*

Exercice 11. Montrer qu'il existe a, b, c tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 12. À l'aide des domino, montrer que

$$\forall\ a, b \in \mathbb{C},\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Exercice 13. [Correction] Simplifier $(n+1)^3 - n^3$.

En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

5 Somme du binôme.

Définition 7. Coefficient du binôme d'ordre n, k

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, ..., n\}$, CàD $0 \leqslant k \leqslant n$

Le coefficient du binôme d'ordre n, k est le nombre : $\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Théorème 8. Propriétés des coefficients du binôme.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

> **À savoir :**

Les coefficients sont des entiers et on a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

> **Triangle de Pascal et formule du pochoir.**

Les coefficients se disposent en triangle et on a la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

> **Propriétés de la ligne n du triangle.**

- *début-fin :* La ligne n est de la forme : $1, n, ..., n, 1$
- *Symétrie :* On a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- *Maximum :* Les coefficients sont croissants de $k = 0$ à $k = n/2$ et décroissante de ....

  Conséquence : le plus gros coefficient est donc au milieu

Formule(s) du Binôme de Newton.

Soit $\square, a, b \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$(1+\square)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \square^k \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 14. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k$$

Exercice 15. [Correction]

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ tous}}^{n} \binom{n}{k}$.
2. En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, Calculer

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdots \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \cdots.$$

6 Majorer/minorer/Encadrer une somme.

Théorème 9. Comment majorer une somme

On considère la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{Bof_k}_{\text{plateau n°k}}$

> Étape 1. Pour $k \in \{0,1,...,n\}$,
on majore $\underbrace{Bof_k}_{\text{plateau n°k}} \leqslant M_k$ *avec Wikking ou Q1*

> Étape 2. On somme l'inégalité de $k=0$ à $k=n$
Ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} M_k$
$\leqslant$ *On calcule la somme*

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 1$. On sait que : $t^n - 1 = (t-1)\left[t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1\right]$
Montrer que : $t^n - 1 \leqslant n t^{n-1}(t-1)$

Exercice 17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant H_{2n} - H_n \leqslant 1$

Exercice 18. [Correction] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant H_n$

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant 2$.
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant 3/2$
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On a

$> S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^n.$

$> S_2 = 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + \cdots + 3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} (3^2)^k$

$> S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots.$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1}$$

$$= \frac{(2n+2)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

La suite (U_n) est croissante.

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{k=n}$$

$$= \frac{2n(n+1)+n(2n+1)-2(2n+1)(n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

La suite (V_n) est décroissante.

$$V_n - U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Les sommes

$> \sum_{k=1}^{n} k + 1 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

$> \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n$

$> \sum_{k=n}^{3n} (3k-1) = 3\sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3\left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right] - 1(3n-n+1)$

$> \sum_{i=0}^{n} i(i+2) = \sum_{i=0}^{n} (i^2+2i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i$

$> \sum_{k=1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} \max(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$

Les Produits

> $\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right) = \underbrace{2.2^1}\,\underbrace{2.2.2^2}\,\underbrace{2.3.2^3}\ldots.\,\underbrace{2.n.2^n} = 2^n\, n!\, 2^{1+2+3+\cdots+n}$

De plus $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

> $\prod_{k=1}^{n}(-2)^k = \underbrace{(-2)}\,\underbrace{(-2)^2}\,\underbrace{(-2)^3}\ldots.\,\underbrace{(-2)^n} = (-1)^{1+2+3+\cdots+n}\, 2^{1+2+3+\cdots+n}$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On a

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\ pair}}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \textit{ On réindexe avec } k=2p$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

De plus $\sum_{tous}^{\infty}\cdots = \sum_{pair}^{\infty}\cdots + \sum_{impair}^{\infty}\cdots$, ainsi

$$\sum_{impair}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{tous}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{pair}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$$A_n = \textit{ Voir exemple du cours.}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

$$\textit{On réindexe avec } p = k+1$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}(k+1)2^{k+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}(k+1)2^k 2$$

$$= 2\sum_{p=0}^{n-1}k2^k + 2\sum_{p=0}^{n-1}2^k$$

$$= 2\left[B_{n-1} + \underbrace{0}_{p=0}\right] + 2\times(Somme\ Géo)$$

$$= 2\left[B_n - \underbrace{n2^n}_{p=n}\right] + 2\times\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$\textit{On en déduit la valeur de } B_n$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On a

> $1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}$. On applique la formule avec $\square = q$ et $2n$.

> $1-q+q^2-q^3+\cdots+(-1)^n q^n = 1+\square+\square^2+\cdots+\square^n$ avec $\square = -q$.
On applique la formule.

> $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots+2^n = 1+\square+\square^2+\cdots+\square^{2n}$ avec $\square = \sqrt{2}$.
On applique la formule avec $\square = \sqrt{2}$ et $2n$.

2. On a

$> \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = 1 + \square + ... + \square^n$

$> \sum_{k=0}^{n} (2^{2k+n}.3^{n-3k}) = \sum_{k=0}^{n} 2^n (2^2)^k 3^n (3^{-3})^k = 2^n 3^n \sum_{k=0}^{n} (2^2 3^{-3})^k = 2^n 3^n (1 + \square + ... + \square^n)$ avec $\square = 4/27$

$> 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + ... + 3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[2^{n-1-k}\ ,3^{2k}\right]$ puis on continue comme ci-dessus.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{11\cdots1}_{n\,fois} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{1-10^n}{1-10} = \frac{10^n - 1}{9}$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 11 + ... + \underbrace{11\cdots1}_{n\,fois} = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\sum_{k=1}^{n} 10^k - \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-1}{9} - n\right] = \frac{10^{n+1} - 9n - 1}{9^2}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. Récurrence.
2. $$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1} &= [x]' + \left[x^2\right]' + \left[x^3\right]' + ... + + \left[x^n\right]' \\ &= \left[x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right]' \\ &= \left[x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1})\right]' \\ &= \left[x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right]' \end{aligned}$$
3. Voir exercice 4.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

On a $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

On somme l'égalité de $k = 1$ à $k = n$ ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k+1)^3 - k^3} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{3k^2 + 3k + 1}$$

$> \text{À Gauche} : \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = \ Domino\ = (n+1)^3 - 1^3.$

$> \text{À Droite} : \sum_{k=1}^{n} \left[3k^2 + 3k + 1\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$

$$\text{Conclusion} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \cdots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) On a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{\square}^k=(1+\square)^n \qquad avec\ \square=-x$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k-\underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1}=(1+x)^{n+1}-x^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}x^k=\textit{On réindexe avec } p=k+1$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^{p-1}=x^{-1}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^p=\frac{1}{x}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p-\underbrace{1}_{p=0}\right]=\frac{1}{x}\left[(1+x)^n-1\right]$$

Remarque : le calcul est valide pour $x\neq 0$.

La situation particulière $x=0$ est facile à traiter

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. On a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k=(1+1)^n=2^n$.
2. À l'aide d'une disjonction Pair-Impair, on a

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{n}\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad 0=(1-1)^n=\sum_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{n}\binom{n}{k}$$

Ainsi on trouve $\sum_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

1. Différence.
2. J'applique l'inégalité avec $1,2,3,...,n$ ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(2)-\ln(1)&\leqslant {}^1/_1\\
\ln(3)-\ln(2)&\leqslant {}^1/_2\\
\ln(4)-\ln(3)&\leqslant {}^1/_3\\
&.....\\
\ln(n)-\ln(n-1)&\leqslant {}^1/_{(n-1)}\\
\ln(n+1)-\ln n&\leqslant {}^1/_n
\end{aligned}$$

Puis on somme les inégalités.