

Faire les exercices 1,2,3 et essayer l'exercice 4. Les autres c'est du bonus.

Exercice 1. [Correction] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \binom{2n}{n}$.

Calculer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{(2n)}}{2n+1}$.

Exercice 2. [Correction]

1. Montrer que : $\forall x > 1, 2 \frac{x-1}{x+1} \leq \ln(x)$

En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b, \frac{2}{a+b} \leq \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}$

2. Montrer que : $\forall x > 1, \ln(x) \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}$

En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b, \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \frac{a+b}{2ab}$

Exercice 3. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$
et que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

3. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(a) Méthode 1. En montrant, *sans récurrence*, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

(b) Méthode 2. En montrant, *par récurrence*, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ℓ .

On sait/admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ

5. Étude de $|u_n - \ell|$, la distance entre u_n et ℓ

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$.

Plus Difficile.

Exercice 4. [Correction] Soient $p, q \geq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère la fonction

$$h: t \mapsto a^p \frac{t^{-1/q}}{p} + b^q \frac{t^{1/p}}{q}$$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h .
2. En déduire qu'elle admet un unique minimum égale à ab .

Exercice 5. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On considère la proposition

$$H_{<m>} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \leq 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$

Il est clair que $H_{<0>}$ est vrai.

(a) Montrer que : Si $0 \leq m \leq n-1$ alors $[H_{<m>} \implies H_{<m+1>}]$

(b) En déduire que : $u_n \leq 3$.

2. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $0 \leq x \leq y$, montrer que : $y^{n+1} - x^{n+1} \leq (n+1) y^n (y-x)$

Indication : On remarque que comme $0 \leq x \leq y$, on a $|y^{n+1} - x^{n+1}| = y^{n+1} - x^{n+1}$ et $|y-x| = y-x$

Et on a l'idée d'utiliser le TAF

(b) En déduire que : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$$\text{Indication : On a } u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante et majorée par 3

donc elle converge vers $\ell \leq 3$

Vraiment plus difficile

Exercice 6. [Correction] On va démontrer, à l'aide d'une récurrence bien particulière, la proposition $H\langle n \rangle$ suivante :

$$H_{<n>} : \left| \begin{array}{l} \forall x_1, \dots, x_n \text{ des réels positifs, on a l'inégalité} \\ (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $H_{<2>}$ est vraie.
2. Montrer que $H_{<2>} \implies H_{<4>}$.
3. Montrer que $H\langle n \rangle \implies H\langle 2n \rangle$.
4. Montrer que $H\langle n+1 \rangle \implies H\langle n \rangle$. (Attention il n'y a pas d'erreur.)

Indication : Poser le problème et pour une fois, on part de $H_{<n+1>}$ avec en plus le réel x_{n+1} définie par

$$x_{n+1} = (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

5. Expliquer pourquoi $\forall n, H\langle n \rangle$ est vraie

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{(2n)}}{2n+1}$.

On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

On fait par récurrence $H < n > : \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{(2n)}}{2n+1}$

> Initialisation avec $n=0$.

C'est clair car $\binom{2.0}{0} = 1$ et $\frac{2^{(2.0)}}{2.0+1} = 1$

Hérédité. On suppose $H < n >$

On va montrer $H < n+1 >$, CàD $\binom{2(n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{(2(n+1))}}{2n+3} = \frac{2^{2n+2}}{2n+3}$
--

On a

$$\begin{aligned} \binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &\text{On applique } H < n > \\ &\geq \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{2^{(2n)}}{2n+1} \\ &\geq \frac{1}{n+1} 2^{2n+1} \\ &\geq \frac{1}{n+1} \frac{2^{2n+2}}{2} = \frac{1}{2n+2} 2^{2n+2} \geq \frac{1}{2n+3} 2^{2n+2} \quad \text{Fini} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x > 1, 2 \frac{x-1}{x+1} \leq \ln(x)$

On étudie la fonction : $h : x \mapsto \ln(x) - 2 \frac{x-1}{x+1}$

En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, $\frac{2}{a+b} \leq \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}$ Pour tout $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, on a

On chemine.

$$\text{On a } \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On applique l'inégalité avec $x = b/a > 1$ car $0 < a < b$

$$\geq \frac{1}{b-a} 2 \frac{\left(\frac{b}{a}\right) - 1}{\left(\frac{b}{a}\right) + 1} = \dots = \frac{2}{a+b}$$

2. Montrer que : $\forall x > 1, \ln(x) \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}$

On étudie la fonction : $h : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x} - \ln(x)$

En déduire que : $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, $\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \frac{a+b}{2ab}$

On chemine

Pour tout $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, on a

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On applique l'inégalité avec $x = b/a > 1$ car $0 < a < b$

$$\leq \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}{\frac{b}{a}} = \dots = \frac{a+b}{2ab}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

On va étudier la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

> La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned} > \forall x \geq \sqrt{2}, f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-2}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2 - 2}{x^2} \geq 0 \text{ car } x \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

> D'où le tableau

Conclusion : la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

Montrer que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall x \geq \sqrt{2}, |f'(x)| &= f'(x) \text{ car } f' > 0 \text{ et } \forall x \geq \sqrt{2}, \frac{1}{2} - |f'(x)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-2}{x^2} \right) \\ &= \frac{-1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \geq \sqrt{2}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

D'après le TAF, la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

On fait par récurrence $H_{<n>} : \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$

Initialisation $n = 0$

Comme $u_0 = 2$, $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \leq u_n \leq 2 \\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{f(\sqrt{2})}_{=\sqrt{2}} \leq f(u_n) \leq \underbrace{f(2)}_{3/2 < 2}$$

Conclusion : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ Yes

3. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (a) Méthode 1. En montrant, sans récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(-u_n + \frac{2}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 - u_n^2}{u_n} \right) \leq 0 \text{ car } u_n \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

- (b) Méthode 2. En montrant, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

On fait par récurrence $H_{<n>} : u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation $n = 0$

Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{3}{2}$, $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$

Conclusion : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ Yes

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ℓ .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geq \sqrt{2}$

On sait/admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ

$$\text{On a } f(\ell) = \ell \iff \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) = \ell. \text{ On ré-organise et on trouve } \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) = \ell \iff \ell^2 = 2$$

$$\text{Ainsi } \ell = +\sqrt{2} \text{ ou } \ell = -\sqrt{2}.$$

Conclusion. Comme $\ell \geq \sqrt{2}$ on a forcément $\ell = \sqrt{2}$

5. Étude de $|u_n - \ell|$, la distance entre u_n et ℓ

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu à la question Q1 que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$,

$$\text{CàD } \forall x, x' \geq \sqrt{2}, |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$$

On applique cette inégalité avec $x = u_n \geq \sqrt{2}$ et $\ell = \sqrt{2}$

$$\text{Conclusion : } \left| \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} - \underbrace{f(\ell)}_{=\ell} \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$.

On fait par récurrence $H_{<n>} : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h .

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} \forall t > 0, h'(t) &= \frac{d}{dt} \left[a^p \frac{t^{-\frac{1}{q}}}{p} + b^q \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \right] = a^p \frac{-1}{q} \frac{t^{-\frac{1}{q}-1}}{p} + b^q \frac{1}{p} \frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{q} \\ &= \frac{t^{-1}}{pq} \left[-a^p \frac{1}{t^{\frac{1}{q}}} + b^q t^{\frac{1}{p}} \right] \\ &= \frac{1}{pq t} \left[\frac{-a^p + b^q t^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}}{t^{\frac{1}{q}}} \right] \\ &= \frac{1}{pq t} \left[\frac{-a^p + b^q t}{t^{\frac{1}{q}}} \right] \end{aligned}$$

D'où le tableau

x	0	a^p/b^q	$+\infty$
$-a^p + b^q t$	-	0	+
h'	-	0	+
h	$+\infty$	m	$+\infty$

En déduire qu'elle admet un unique minimum égale à ab .

D'après le tableau, le minimum m de la fonction h vaut

$$\begin{aligned} m = h\left(\frac{a^p}{b^q}\right) &= a^p \frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{-\frac{1}{q}}}{p} + b^q \frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}}{q} \\ &= \frac{a^p a^{-\frac{p}{q}} b^{\frac{q}{q}}}{p} + \frac{a^{\frac{p}{p}} b^q b^{-\frac{q}{p}}}{q} \\ \text{Or } p + \frac{-p}{q} &= p \left(1 + \frac{-1}{q}\right) = p \frac{1}{p} = 1 \text{ et } q + \frac{-q}{p} = \dots = 1 \\ &= ab \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = ab \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. (a) On suppose $m \leq n-1$ et $H_{<m>} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \leq 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$

On a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{m^2}{n^3}\right) \\ &\leq 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n^2} + \frac{m^2}{n^3} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{(m+1)^2}{n^2} - \left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n^2} + \frac{m^2}{n^3}\right) = \frac{m+1}{n^2} - \frac{m^2}{n^3} = \frac{mn+n-m^2}{n^3} = \frac{n(n-m)+n}{n^3} > 0$$

$$\text{Donc } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} \leq 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)^2}{n^2}, \text{ C\`aD } H_{<m+1>} \text{ est vraie}$$

- (b) Comme $H_{<0>}$ est vrai, on a avec ce qui pr\`ec\`ede, $H_{<1>}, H_{<2>}, H_{<3>}, \dots, H_{<n-1>}, H_{<n>}$ sont vraies

$$\text{Ainsi avec } H_{<n>}, \text{ on a } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$$

2. (a) On suppose que $0 \leq x \leq y$ ainsi on a

$$\begin{aligned} y^{n+1} - x^{n+1} &= (y-x) \left[y^n + y^{n-1}x + y^{n-2}x^2 + \dots + yx^{n-1} + x^n \right] \\ &\leq (y-x) \left[y^n + y^{n-1}y + y^{n-2}y^2 + \dots + yy^{n-1} + y^n \right] \\ &\leq (y-x) \left[(n+1)y^n \right] \end{aligned}$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_A - \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]}_B \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Je garde A}} - \underbrace{\left[n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]}_{\text{Je majore B avec la question 2.a}} \\ &\geq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \underbrace{\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Calcul et simplification}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{On factorise et on simplifie}} \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante major\`ee par 3 donc elle converge vers une limite $\ell \leq 3$.

On montera bient\`ot que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e \approx 2.7$.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Montrer que $H_{\langle 2 \rangle}$ est vraie.

Soit x_1 et x_2 fixé.dans $]0, +\infty[$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \quad \text{fini.}$$

2. Montrer que $H_{\langle 2 \rangle} \Rightarrow H_{\langle 4 \rangle}$.

On suppose que $H_{\langle 2 \rangle}$ est vraie

Pour tout $a, b, c, d \geq 0$

On va montrer en cheminant que : $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sqrt[4]{abcd} &= \sqrt{\sqrt{abcd}} \\ &= \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \end{aligned}$$

On applique $H_{\langle 2 \rangle}$ avec $\sqrt{ab} \geq 0$ et $\sqrt{cd} \geq 0$

$$\leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}$$

On applique $H_{\langle 2 \rangle}$ pour majorer $\sqrt{ab} \geq 0$ ainsi $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

On applique $H_{\langle 2 \rangle}$ pour majorer $\sqrt{cd} \geq 0$ ainsi ...

$$\leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

3. Montrer que $H_{\langle n \rangle} \Rightarrow H_{\langle 2n \rangle}$.

Pour tout $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ des réels positifs fixés.

On veut

$$(x_1 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq \dots \leq \frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{2n}$$

On part de

$$(x_1 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \left((x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} (x_{n+1} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} (x_{n+1} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}$$

On applique $H_{\langle 2 \rangle}$ avec $\square = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et $\Delta = (x_{n+1} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$

$$\leq \frac{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} + (x_{n+1} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}{2}$$

On applique $H_{\langle n \rangle}$ et $H_{\langle n \rangle}$

$$\leq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}}{2}$$

$$\leq \frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{2n} \quad \text{Fini.}$$

4. Montrer que $H_{\langle n+1 \rangle} \Rightarrow H_{\langle n \rangle}$.

Pour tout $x_1, \dots, x_n$ des réel fixés. On choisit, suivant les indications du texte, $x_{n+1} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

> On applique $H_{\langle n+1 \rangle}$ avec ces réels.

$$(x_1 \dots x_n x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1}$$

Maintenant on isole ce que l'on cherche, i.e $(x_1 \dots x_n)$ et on remplace x_{n+1} par sa valeur.

> On fait ensuite les calculs qui s'imposent, i.e. on regroupe.

$$(I) \Leftrightarrow (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

On regroupe les termes.

$$\Leftrightarrow (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \leq (x_1 + \dots + x_n)^{1 - \frac{1}{n+1}} \times n^{\frac{1}{n+1}} \times \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \right]$$

$$\leq (x_1 + \dots + x_n)^{\frac{n}{n+1}} \times n^{\frac{1}{n+1}} \times \left[\frac{1}{n} \right]$$

$$\leq (x_1 + \dots + x_n)^{\frac{n}{n+1}} \times \left(\frac{1}{n} \right)^{1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}}$$

On élève à la puissance $(n+1)$ est on trouve **miraculeusement** $H\langle n \rangle$.

5. Expliquer pourquoi $\forall n, H\langle n \rangle$ est vraie

Comme $H\langle n \rangle \Rightarrow H\langle 2n \rangle$ et que $H\langle 2 \rangle$ est vraie, on a

$$H\langle 2 \rangle \Rightarrow H\langle 4 \rangle \Rightarrow H\langle 8 \rangle \Rightarrow H\langle 16 \rangle \Rightarrow \dots \Rightarrow H\langle 2^k \rangle \Rightarrow \dots$$

Soit n fixé qce. Il existe k tel que $n \leq 2^k$ (en fait il suffit de prendre $k \geq \frac{\ln n}{\ln 2}$).

Puis partant de $H\langle 2^k \rangle$, on redescend avec $H\langle p+1 \rangle \Rightarrow H\langle p \rangle$ de $H\langle 2^k \rangle$ est vraie à $H\langle n \rangle$ est vraie.