

Exercice 1. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.
2. On admet que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$
 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$
3. En déduire que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.
4. On va démontrer l'encadrement admis.
 - (a) Justifier que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \leq x$
 - (b) Démontrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$

Indication : Étudier une fonction et dériver suffisamment

Exercice 2. [Correction] Soit la suite (A_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

1. Une majoration.
 - (a) Démontrer que pour $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
 - (b) Montrer que pour tout $k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
 - (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln A_n \leq 2$ puis que $A_n \leq e^2$.
2. Une amélioration.
 - (a) Montrer que pour tout $k \geq 2, 1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
 - (b) En déduire (à l'aide d'un télescopage) que $A_n \leq 4$.

Kulture

On peut démontrer que la suite (A_n) converge vers $\frac{1}{\pi} \left(\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} \right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \approx 3.68$.

La majoration par $e^2 \approx 7.39$ n'est pas mauvaise et celle par 4 est vraiment bonne.

Exercice 3. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

1. Convergence de I_n .
 - (a) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$
 - (b) Encadrer I_n . En déduire que : la suite (I_n) converge vers 0.
2. Ordre de grandeur de I_n .
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$
 - (b) En déduire la limite de nI_n quand $n \rightarrow +\infty$. On commencera par ré-organiser l'égalité précédente.

Exercice 4. [Correction] On considère les suites (S_n) et (I_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \quad \text{et} \quad S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1. Encadrer I_n . En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Démontrer que : $\forall t \geq 0, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$
En déduire que : $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n I_n$
3. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers

— Bonus D'après DS du 13 Octobre 2025 —

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (A_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, 1+x \leq e^x$.
2. En déduire un majorant pour la suite (A_n) , CàD déterminer K tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \leq K$

Exercice 6. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$

1. Calculer I_0 et I_2 . Calculer I_1 avec le changement de variable $u = 1+t$
2. Montrer que la suite (I_n) croissante, CàD Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $I_{n+1} - I_n$
3. Calculer $\int_0^1 t dt$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt$. *Remarque : Ce n'est pas une IPP.*
4. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
Que peut-on en déduire ?
5. En peu plus précis.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n} \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt$

(b) Montrer que : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$

puis montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(c) En déduire la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de : $n \left(I_n - \frac{1}{2} \right)$

Exercice 7. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n$

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
 - (a) On considère la fonction $h : x \mapsto (n+1) \ln \left(\frac{x+1}{n+1} \right) - n \ln \left(\frac{x}{n} \right)$.
Montrer que la fonction h est positive sur $[1, n]$.
 - (b) En déduire que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n} \right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1} \right)^{n+1}$
puis que la suite (S_n) est monotone.
2. Majoration.
 - (a) Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$
 - (b) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n} \right)^n \leq e^{k-n}$.
 - (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{e}{e-1}$

Exercice 8. [\[Correction\]](#) L'inégalité de Milne.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a, b > 0$, on appelle *somme parallèle de a et b* , notée $a||b$ le réel : $a||b = \frac{ab}{a+b}$

1. Démontrer que l'addition parallèle est associative, CàD que : $\forall a, b, c > 0, (a||b)||c = a||(b||c)$.
2. On va de démontrer l'inégalité de Milne, CàD

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}, \sum_{k=1}^n (a_k || b_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) || \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

- (a) Pour tout $a, b > 0$, déterminer le minimum de la fonction $\left[x \mapsto ax^2 + b(1-x)^2 \right]$.
- (b) En déduire que : $\forall a, a', b, b' > 0, (a||b) + (a'||b') \leq (a+a')||(b+b')$
- (c) En déduire l'inégalité de Milne.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Correction En rouge, les commentaires

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.

On va majorer la somme

> Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$k^3 \leq n^3$$

> On somme l'inégalité de $k=1$ à $k=n$,

$$\begin{aligned} \text{ainsi } \sum_{k=0}^n k^3 &\leq \sum_{k=0}^n n^3 \\ &\leq n^3 \times (\text{nb de plateau}) \\ &\leq n^3 \cdot (n-1+1) = n^4 \quad \text{YES} \end{aligned}$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

> Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Attention : il faut justifier le passage de x à k/n^2

On applique l'encadrement admis avec $x = k/n^2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\text{ainsi } \frac{k}{n^2} - \frac{\left(k/n^2\right)^3}{6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

> On somme de $k=1$ à $k=n$ ainsi

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \right]}_{\text{Gauche}} \leq S_n \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} \right]}_{\text{Droite}}$$

De plus

$$\text{Droite} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\text{Gauche} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3$$

Pour minorer $A-B$, je majore B

$$\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6} n^4 = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

3. En déduire que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.

On a facilement $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : d'après le théorème des 2 gendarmes, la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

4.

- (a) Justifier que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \leq x$

La fonction Sinus est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

donc on a : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \leq \underbrace{x}_{\text{Eq de la tgt en } x=0}$

- (b) Démontrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$

On étudie la fonction $h : x \mapsto \sin(x) - \left[x - \frac{x^3}{6}\right]$

> La fonction h est (super)-dérivable sur $\mathcal{D} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

> $\forall x \in \mathcal{D}, h''(x) = -\sin(x) + x \geq 0$ car $\forall x \in [...], \sin(x) \leq x$

> On fait un bô tableau

Conclusion : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], h(x) \geq 0$ Fini

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

Correction En rouge, les commentaires

1. Une majoration.

(a) Démontrer que pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$,
ainsi $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq \underbrace{x}_{\text{Tangente}}$

(b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \geq 2, \text{ on a : } G - p &= \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2} \\ &= \frac{k^2 - k^2 + k - k + 1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \geq 0 \quad \text{Yes} \end{aligned}$$

(c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln A_n \leq 2$ puis que $A_n \leq e^2$.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } \ln(A_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

Il faut utiliser Q1 et justifier le passage de x à $1/k^2$

On applique Q1 avec $x = \frac{1}{k} \geq 0$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On utilise la majoration précédente

Attention elle est valide pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$

Donc il faut séparer le plateau n°1

$$\leq \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Télescopage

$$\leq 1 + 1 - \frac{1}{n+1} \leq 2 - 0 = 2$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(A_n) \leq 2$ donc $A_n \leq e^2$

2. Une amélioration.

(a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \geq 2, \text{ on a : } G - i \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} - \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{k^2 \cdot k^2 - (k-1)(k+1) \cdot k^2 - (k-1)(k+1)}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \\ &= \frac{k^4 - k^4 + k^2 - k^2 + 1}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \\ &= \frac{1}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \geq 0 \quad \text{Yes} \end{aligned}$$

(b) En déduire que : $A_n \leq 4$.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

On utilise la majoration précédente

Attention elle est valide pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$

Donc il faut séparer le plateau n°1

$$\begin{aligned} &\leq 2 \times \prod_{k=2}^n \underbrace{1 + \frac{1}{k^2}}_{\leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}} \\ &\leq 2 \times \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} \\ &\leq 2 \times \underbrace{\frac{2^2}{1 \times 3}}_{k=2} \times \underbrace{\frac{3^2}{2 \times 4}}_{k=3} \times \underbrace{\frac{4^2}{3 \times 5}}_{k=4} \cdots \times \underbrace{\frac{(n-1)^2}{(n-2) \times n}}_{k=n-1} \times \underbrace{\frac{n^2}{(n-1) \times (n+1)}}_{k=n} \end{aligned}$$

Télescopage

$$\begin{aligned} &\leq 2 \cdot \frac{2^2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{(n+1)} \\ &\leq 4 \times \frac{n}{n+1} \leq 4 \times \frac{n+1}{n+1} = 4 \quad \text{Yes!!} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Correction En rouge, les commentaires

On définit pour tout entier n

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. Convergence de I_n .

(a) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$

On étudie la fonction h définie par $h: t \mapsto \frac{t}{e} - \ln(t)$

> La fonction h est dérivable sur $[1, e]$

$$\begin{aligned} > \forall x \in [1, e], h'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{t}{e} - \ln(t) \right] \\ &= \frac{1}{e} - \frac{1}{t} \end{aligned}$$

On finalise le calcul avec FFF

$$= \frac{t-e}{et}$$

> D'où le bô tableau

Conclusion : $\forall x \in [1, e] \quad h(x) \geq 0$ FINI

(b) En déduire un encadrement de I_n , puis que la suite (I_n) converge vers 0.

On doit majorer une intégrale, on fait les 2 chevrons

> Pour tout/chaque $t \in [1, e]$, on a

un peu de finesse dans ce monde de brut, on va utiliser Q1

$$0 \leq x^2 (\ln x)^n \leq x^2 \left(\frac{x}{e} \right)^n = \frac{x^{n+2}}{e^n}$$

> On intègre l'inégalité sur de $t = 1$ à $t = e$,

$$\begin{aligned} \text{ainsi } \int_1^e 0 dx \leq I_n &= \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx \\ &\leq \left[\frac{1}{e^n} \frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_1^e \\ &\leq \frac{e^{n+3} - 1}{e^n(n+3)} = \underbrace{\frac{e^3}{n+3}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{e^n(n+3)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

Conclusion : Avec le théorème des 2 gendarmes, on conclut que la suite (I_n) converge vers 0.

2. Détermination de la limite la suite (nI_n) .

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$

On fait une IPP.

$$\text{On a } I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx$$

$$u' = x^2 \rightsquigarrow u = \frac{x^3}{3}$$

$$v = (\ln x)^{n+1} \rightsquigarrow v' = \frac{1}{x} (n+1) (\ln x)^n$$

(b) En déduire la limite de nI_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Le texte demande d'étudier nI_n donc on ré-organise nI_n CàD

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{3} I_n &= \frac{e^3}{3} - I_{n+1} \\ \Rightarrow nI_n &= e^3 - 3 \underbrace{I_{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} - \underbrace{I_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

Conclusion : La suite (nI_n) converge vers e^3 .

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Étude de (I_n) .

(a) À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Pour encadrer l'intégrale, on chevonne

> Pour tout/chaque $t \in [0, 1]$

$$\frac{0}{1+1} \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+0}$$

> J'intègre l'inégalité sur $[0, 1]$

$$\text{Ainsi } 0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{Or } \int_0^1 t^n dt = [\text{Primitive}]_0^1 = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(b) C'est le théorème des 2 gendarmes.

2. Démontrer que : $\forall t \geq 0, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$

On reconnaît une Somme géo.

$$\text{En déduire que : } S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n I_n$$

$$\text{On remarque que : } \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

On intègre l'égalité de la question précédent sur $[0, 1]$, ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \int_0^1 \left[1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right] dt$$

> A Gauche : c'est égale à $\ln(2)$

$$> \text{A Droite : On distribue l'intégrale, ainsi c'est égale } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n I_n$$

$$\text{Conclusion : On a bien } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \ln 2 - (-1)^n I_n$$

3. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, on peut conclure que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$

$$\text{On vient de justifier que : } \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{1492}}{1492} + \dots + \text{jusqu'à l'infini.}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, 1+x \leq e^x$.

La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, ainsi on a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq \frac{1+x}{\text{Eq de la tgt en } x=0}$

2. En déduire un majorant pour la suite (A_n) , CàD déterminer K tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \leq K$

> Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq e^{\frac{k}{n^2}} \text{ On utilise Q1 avec } x = k/n^2 > 0.$$

> On "produit" de $k=1$ à $k=n$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } A_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}} \\ &\leq \underbrace{e^{\frac{1}{n^2}}}_{\frac{1}{n^2}} \underbrace{e^{\frac{2}{n^2}}}_{\frac{2}{n^2}} \dots \underbrace{e^{\frac{n}{n^2}}}_{\frac{n}{n^2}} \\ &\leq e^{\frac{1+2+\dots+n}{n^2}} \\ &\leq \exp\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right) \\ &\leq \underbrace{\exp\left(\frac{n+1}{2n}\right)}_{\text{Attention ça dépend de } n} \leq \exp\left(\frac{n+n}{2n}\right) = e^1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On considère la suite (I_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$

1. Calculer I_0 et I_2 .

$$\text{On a } I_0 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^0} dt = \int_0^1 t dt = \int_0^1 \text{Monome } dt$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\square'}{\square} dt$$

Calculer I_1 avec le changement de variable $u = 1+t$

$$\begin{aligned} \text{On a } I_1 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt \\ &= \int_1^2 \frac{u-1}{u} du \\ &= \int_1^2 1 du + \int_1^2 \frac{1}{u} du \\ &= 1 + \left[\ln|u| \right]_1^2 = 1 + \ln(2) \end{aligned}$$

2. Montrer que la suite (I_n) croissante, CàD Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $I_{n+1} - I_n$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+t^{n+1}} - \frac{t}{1+t^n} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[t \frac{(1+t^n) - (1+t^{n+1})}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[t \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left[t \cdot t^n \frac{1-t}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right]}_{\text{C'est } \geq 0 \text{ sur } [0,1]} dt \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \geq 0$

3. Calculer $\int_0^1 t dt$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt$.

$$\text{On a } \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt &= \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \\ &= \int_0^1 \left[t - \frac{t^{n+1}}{1+t^n} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t(1+t^n) - t^{n+1}}{1+t^n} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+t^n} \right] dt = I_n \end{aligned}$$

4. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$> \text{ Pour tout } t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^n} \leq \frac{t^{n+1}}{1+0} = t^{n+1}$$

> On intègre l'inégalité sur $t = 0$ à $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } 0 &\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt \\ &\leq \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion : Comme $\frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, le théorème des 2 gendarmes assure que $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Que peut-on en déduire ?

$$\text{Comme } I_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \text{ et } \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{ainsi on a } I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Conclusion : La suite (I_n) converge vers $1/2$

5. En peu plus précis.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n} \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt$

$$\text{On fait une IPP } u' = \frac{t^{n-1}}{1+t^n} \rightsquigarrow u = \frac{1}{n} \ln(1+t^n)$$

$$v = t^2 \rightsquigarrow v' = 2t$$

A finir

(b) Montrer que : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$

Convexité

puis montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

> On utilise l'inégalité précédente,

$$\text{ainsi pour tout } t \in [0, 1], 0 \leq t \ln(1+t^n) \leq t \cdot t^n$$

> On intègre l'inégalité de $t=0$ à $t=1$

$$\text{Ainsi on } 0 \leq \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t \cdot t^n dt$$

$$\leq \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

$$\text{Avec le théorème des 2 gendarmes } \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Fini.}$$

(c) En déduire la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de : $n \left(I_n - \frac{1}{2} \right)$

$$\text{On a } I_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n} \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt$$

$$\text{On ré-organise, ainsi } n \left(I_n - \frac{1}{2} \right) = \ln 2 - 2 \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2 - 2 \cdot 0 = \ln(2)$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Montrer que la fonction h est positive sur $[1, n]$.

Étude de fonction et tableau de signe.

(b) En déduire que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Comme la fonction $\ln$ est croissante, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} &\iff \ln\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \ln\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\iff h(k) \geq 0 \text{ Fini} \end{aligned}$$

puis que la suite (S_n) est monotone.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = \dots \geq 0$

Conclusion : la suite (S_n) est croissante

2. Majoration.

(a) Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$

Convexité

(b) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq e^{k-n}$.

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a : $\left(\frac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln(k/n)} \leq e^{n(k/n - 1)} = e^{k-n}$

(c) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{e}{e-1}$

$$\begin{aligned} \text{On a } S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k=1}^n e^{k-n} \\ &\leq e^{-n} \sum_{k=1}^n e^k \\ &\leq e^{-n} \left(\frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} - 1 \right) \\ &\leq \frac{e(1 - e^{-n})}{e - 1} \leq \frac{e}{e - 1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) L'inégalité de Milne

1. Démontrer que l'addition parallèle est associative, CàD que : $\forall a, b, c > 0, (a||b)||c = a||(b||c)$.

$$\text{On a } (a||b)||c = \frac{\frac{ab}{a+b}c}{\frac{ab}{a+b} + c} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

et

$$a||(b||c) = \frac{a\frac{bc}{b+c}}{a + \frac{bc}{b+c}} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Donc l'addition parallèle est bien associative.

2. (a) Pour tout $a, b > 0$, déterminer le minimum de la fonction $\left[x \mapsto ax^2 + b(1-x)^2 \right]$.

$$\text{Comme } ax^2 + b(1-x)^2 = (a+b)x^2 - 2bx + b,$$

on sait que le minimum est atteint lorsque $x = \frac{2b}{2(a+b)}$, ainsi il vaut

$$(a+b) \left(\frac{b}{(a+b)} \right)^2 - 2b \left(\frac{b}{(a+b)} \right) + b = \frac{b^2}{a+b} - \frac{2b^2}{a+b} + b = \frac{ab}{a+b} = a||b$$

Conclusion : $a||b = \text{Minimum sur } \mathbb{R} \text{ de } ax^2 + b(1-x)^2 = \min \left(ax^2 + b(1-x)^2 \right)$

- (b) En déduire que : $\forall a, a', b, b' > 0, (a||b) + (a'||b') \leq (a+a')||(b+b')$

Pour tout x , on a

$$\begin{aligned} (a+a')x^2 + (b+b')(1-x)^2 &= [ax^2 + b(1-x)^2] + [a'x^2 + b'(1-x)^2] \\ &\geq \underbrace{\min \left(ax^2 + b(1-x)^2 \right) + \min \left(a'x^2 + b'(1-x)^2 \right)}_{=(a||b) + (a'||b')} \end{aligned}$$

Donc $(a||b) + (a'||b')$ minore $(a+a')x^2 + (b+b')(1-x)^2$, c'est donc plus petit que le minimum, ainsi

$$\text{Conclusion : } (a||b) + (a'||b') \leq \min \left((a+a')x^2 + (b+b')(1-x)^2 \right) = (a+a')||(b+b')$$

- (c) En déduire l'inégalité de Milne.

On fait une récurrence.