

Exercice 1. [Correction] Les 4 questions sont indépendantes

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 2^n$

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

3. On admet que la fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Soit la fonction définie $h : x \mapsto h(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

En utilisant les formules admises ci-dessus, Déterminer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, calculer et simplifier $h'(x)$.

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n^2$.

Exercice 2. [Correction] On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$$

1. Montrer que le graphe de la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie.

2. Déterminer les ensemble $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

Calculer et simplifier f' .

3. Un bô tableau.

> Résoudre l'inégalité : $\frac{x}{1-x} \geq 1$. En déduire les variations de la fonction f .

> On admet que : $\square \ln(\square) \xrightarrow[\square \rightarrow 0]{} 0$. En déduire les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

4. En déduire, sur $\mathcal{D}$, un encadrement de $x^x(1-x)^{1-x}$

Exercice 3. [Correction] Le but de l'exercice est de montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

On considère la fonction $f : t \mapsto (1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer, factoriser, simplifier f' .

2. Dresser le tableau de signe et de variation de f puis en déduire le résultat attendu.

Exercice 4. [Correction] On considère la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1. Étude de la fonction f .

(a) Montrer que : $\forall x > 0, xe^x - e^x + 1 \geq 0$

(b) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0, f'(x) < 0$.

(c) Montrer que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

(d) Montrer que : $\forall x > 0, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

Indication : Faire une étude de fonction et utiliser une inégalité classique.

(e) Montrer que : $\forall x > 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. On va maintenant étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) On note $\ell = \ln(2)$. Vérifier que : $f(\ell) = \ell$

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$
Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |1 - \ell|$

(d) Que peut-on conclure ?

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$.

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

2. Montrer que $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

3. En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0$.

On admet que $\frac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1.83$

4. Justifiez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$

Exercice 6. [Correction] Moyenne(s) de deux nombres

On rappelle que : Pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, le réel x^a est défini par $x^a = e^{a \ln(x)}$.

1. Pour $a, b > 0$, on définit les nombres : $A_{a,b} = \frac{a+b}{2}$, $G_{a,b} = \sqrt{a \cdot b}$ et $H_{a,b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

Ce sont respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de a et b

(a) Montrer que : Pour tout $a, b > 0$, $G_{a,b} \leq A_{a,b}$
et justifier que $G_{a,b} = A_{a,b}$ si et seulement si $a = b$.

(b) Montrer que : Pour tout $a, b > 0$, $H_{a,b} \leq G_{a,b}$

2. Pour $p \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$, on définit le nombre : $\mathcal{L}_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$ C'est la moyenne de Lehmer de a et b

(a) On suppose que $0 < a \leq b$. Montrer que : $\mathcal{L}_p(a, b) \leq b$

On admettra que de même : $a \leq \mathcal{L}_p(a, b)$

(b) On fixe $s > 0$ et on considère la fonction $h : t \mapsto \frac{1 + (s)^t}{1 + (s)^{t-1}}$

Justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t)$ est du signe de $(s-1) \ln(s)$.

En déduire que les variations de la fonction h .

(c) Montrer que si p et q sont deux réels avec $p < q$, alors $\mathcal{L}_p(a, b) \leq \mathcal{L}_q(a, b)$.

(d) Déterminer 3 réels p , q et r tel que $A_{a,b} = \mathcal{L}_p(a, b)$, $G_{a,b} = \mathcal{L}_q(a, b)$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}_r(a, b)$
et retrouver les inégalités que l'on a établies à la question Q1

Exercice 7. [Correction] On va démontrer par récurrence l'énoncé $H_{<n>}$ suivant

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour tout } x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ ET \\ x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$$

1. Démontrer que l'énoncé $H_{<2>}$ est vrai.

2. On va démontrer que $H_{<3>} \Rightarrow H_{<4>}$.

(a) On rappelle que : Pour $x > 0$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

On considère la fonction g définie par : $g : x \mapsto g(x) = x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

Démontrer que, sur $]0, +\infty[$, la fonction g admet un minimum que l'on déterminera.

(b) On suppose que l'énoncé $H_{<3>}$ est vrai, CàD $\left. \begin{array}{l} \square, \square', \square'' \text{ sont des réels } > 0 \\ ET \\ \square \times \square' \times \square'' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \square + \square' + \square'' \geq 3$

On va démontrer $H_{<4>}$.

Pour démontrer $H_{<4>}$, on suppose que x_1, x_2, x_3, x_4 sont > 0 et que $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1$

On veut montrer $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$

L'idée est d'appliquer $H_{<3>}$ avec $\square = x_1 \times (x_4)^{1/3}$, $\square' = x_2 \times (x_4)^{1/3}$ et $\square'' = x_3 \times (x_4)^{1/3}$

Est ce possible ? et qu'obtient-on ?

Comme l'objectif est de minorer $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,

on va cheminer, utiliser ce que l'on vient d'établir

puis on essaye d'utiliser $g(\square) \geq \text{Minimum}$ pour conclure.

3. Maintenant que j'ai détaillé la démonstration de $H_{<3>} \Rightarrow H_{<4>}$, montrer que : $H_{<n>} \Rightarrow H_{<n+1>}$.

4. Montrer, en utilisant $H_{<n>}$, l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\text{CàD pour tout } x_1, \dots, x_n > 0, G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 8. L'inégalité arithmético-géométrique

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on définit $\sqrt[n]{a}$ par

$\sqrt[n]{a}$, c'est l'unique solution positive de l'équation $X^n = a$

(a) Montrer que : pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.

(b) Montrer que : pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[2n]{a} = \sqrt{\sqrt[n]{a}}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{Pour tout } x_1, \dots, x_{2^n} \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^n}}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{x_1 x_2 \cdots x_{2^n}}$$

Remarque : dans $\mathcal{P}(n)$, il y a 2^n nombres

(a) Justifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(b) On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$$\text{On pourra détailler } \mathcal{P}(n+1), \text{ gérer les quantificateurs et remarquer que : } \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n} + \frac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n} \right).$$

Conclusion : Le principe de récurrence assure que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que : $2^n \geq n$.

(b) On note $A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ et $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$

En posant $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^n} = A$ et en utilisant $\mathcal{P}(n)$,

montrer que : $G \leq A$ (c'est l'inégalité arithmético-géométrique).

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 2^n$

On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H_{<n>} : u_n = 1 + 2^n$$

> Initialisation avec $n = 0$ et $n = 1$

$$\text{On a } u_0 = 2 = 1 + 2^0 \text{ et } u_1 = 3 = 1 + 2^1$$

Conclusion ! : $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraies

|> Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va montrer $H_{<n+2>}$, CàD $u_{n+2} = 1 + 2^{n+2}$

$$\text{On a : on a } u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

On applique $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

$$= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n)$$

$$= [3 - 2] + 2^n [3 \cdot 2 - 2]$$

$$= 1 + 2^n \cdot 4 = 1 + 2^{n+2} \quad \text{Fini}$$

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \right) \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

3. Soit la fonction définie $h : x \mapsto h(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

En utilisant les formules admises ci-dessus, Déterminer $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$, calculer et simplifier $h'(x)$.

> Le nombre $h(x)$ se calcule Ssi $x \neq 1$

Conclusion : la fonction h est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}$

La fonction h est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Conclusion : la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\begin{aligned} > \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right] \\ &= \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2} \\ &= \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \\ &= \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n^2$.

On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H_{<n>} : u_n \leq n^2$$

> Initialisation avec $n = 1$ et $n = 2$

$$\text{On a } u_1 = 1 \leq 1^2 \text{ et } u_2 = u_1 + \frac{u_0}{0+1} = 2 \leq 2^2 \quad \text{OK}$$

> Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va montrer $H_{<n+2>}$, CàD $u_{n+2} \leq (n+2)^2$

On a : on a $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$

On applique $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

$$\leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } Final - Inter &= (n+2)^2 - \left[(n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \right] = 2n+3 - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{(2n+3)(n+1) - n^2}{n+1} \\ &= \frac{n^2 + 5n + 3}{Bas > 0} > 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

- Montrer que le graphe de la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie.

Comme $f\left(\frac{1}{2} - h\right) = \dots$ et $f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \dots$, on a bien égalité. Ce qui conclut.

- Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

On peut calculer le nombre $f'(x)$ Ssi $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

Donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[$

De plus la fonction f est fabriquée avec les fonctions classiques et les opérations usuelles, ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

Déterminer et simplifier f' .

On a $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

- Résoudre l'inégalité : $\frac{X}{1-X} \geq 1$. En déduire les variations de la fonction f .

On a

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} \geq 0 \end{aligned}$$

On fait un bô tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{2x-1}{1-x}$	-	0	+	-

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

$$\text{On a : } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

Préciser les limites aux borne de $\mathcal{D}$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)) = 0 + 0 = 0$$

et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ à cause de la symétrie.

Ainsi on a le tableau

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	$-\ln(2)$	0

- En déduire, sur $\mathcal{D}$, un encadrement de $x^x (1-x)^{1-x}$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $x^x (1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} = e^{f(x)}$

Le tableau de variation assure que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $-\ln(2) \leq f(x) \leq 0$,

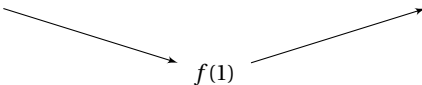
$$\text{Ainsi on a } \forall x \in \mathcal{D}, \underbrace{e^{-\ln 2}}_{=1/2} \leq x^x (1-x)^{1-x} \leq \underbrace{e^0}_{=1}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On considère la fonction $f : t \mapsto (1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[(1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n \right] \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2} n \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2} n \left(\frac{1+t}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{t^{n+1}} \right] \\ &= n(1+t)^{n-1} \left[\frac{t^{n+1} - 1}{t^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

2. D'après les propriétés des monômes, on sait que : $t^{n+1} - 1 \geq 0$ Ssi $t \geq 1$
D'où le tableau

x	0	1	∞
$\text{sgn } f'$	-	0	+
f			

Conclusion : $\forall x > 0, f(t) \geq f(1) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

On applique cette inégalité avec $t = \frac{a}{b} > 0$, ainsi on a $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On considère la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1. Étude de la fonction f .

(a) Montrer que : $\forall x > 0, xe^x - e^x + 1 \geq 0$

On étudie la fonction $h : x \mapsto xe^x - e^x + 1$

(b) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0, f'(x) < 0$.

> On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $e^x - 1 \neq 0$

Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$

De plus la fonction est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques donc la fonction f est dérivable $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} > \forall x \in \mathcal{D}, \text{ on a } f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{e^x - 1} \right] \\ &= \frac{1(e^x - 1) - x(e^x - 0)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x - 1 - x.e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-(xe^x - e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} \leq 0 \text{ à cause de Q1a.} \end{aligned}$$

(c) Montrer que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

Pour tout/chaque $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2} + \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} &= \frac{-(e^x - 1)^2 + (e^{2x} - 2xe^x - 1)}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1) + (e^{2x} - 2xe^x - 1)}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-2xe^x + 2e^x - 2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-xe^x + e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = f'(x) \end{aligned}$$

(d) Montrer que : $\forall x > 0, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

On étudie la fonction $h : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$

> La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} > \forall x \geq 0, f'(x) &= \frac{d}{dx} [e^{2x} - 2xe^x - 1] \\ &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x [e^x - x - 1] \end{aligned}$$

On sait (convexité de exp) que : $\forall x \geq 0, e^x - x - 1 = e^x - (1 + x) \geq 0$

> D'où le tableau

Conclusion : $\forall x > 0, h(x) \geq 0$

(e) Montrer que : $\forall x > 0, \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \text{ on a : } \left| f'(x) \right| = -f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \leq \frac{1}{2} - \mathcal{O} \quad \text{car } \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geq 0$$

2. On va maintenant étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) On note $\ell = \ln(2)$. Vérifier que : $f(\ell) = \ell$

$$\text{On a } f(\ell) = f(\ln(2)) = \frac{\ln(2)}{e^{\ln(2)} - 1} = \frac{\ln(2)}{2 - 1} = \ln(2) = \ell$$

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

On sait que : $\forall x > 0, f'(x) < 0$ et on a "facilement" que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

D'où le tableau

Conclusion : $\forall x > 0, f(x) > 0$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(u_{n-1}) = f(\square) > 0$

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$

La fonction f est dérivable et $\forall x > 0, \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{2}$

donc la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$

et on sait que : $\forall x, x' > 0, |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$

J'applique cette inégalité avec $x = u_n > 0$ et $x' = \ell = \ln(2) > 0$,

Ainsi on a : $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$

(d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |1 - \ell|$

On fait par récurrence $H_{<n>}: |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |1 - \ell|$

OU BIEN à la mode géo

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &\leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ell| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \ell| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} |u_0 - \ell| = \frac{1}{2^n} |1 - \ell| \end{aligned}$$

(e) Que peut-on conclure ?

La distance entre u_n et $\ell = \ln(2)$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Calcul classique

2. Montrer que : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

On étudie la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]$

> La fonction h est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} > \forall x \geq 0, \text{ on a } h'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \right) \\ &= \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \\ &= \frac{1 - (1 - x + x^2 - x^3)(1+x)}{1+x} \\ &= \frac{x^4}{1+x} \end{aligned}$$

> D'où le tableau

$$\text{Conclusion : } \forall x \geq 0, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

3. En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{-1}{3} \right] + \frac{1}{n^3} \left[\frac{-1}{6} + \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{8n^4} \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[\frac{-1}{12} \right] + \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{12} \right] + \frac{1}{8n^4} \\ &\leq \frac{-2n^2 + 2n + 3}{24n^4} \end{aligned}$$

Comme $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-2)(+3) = +28 >$,

Le trinôme admet 2 racines $\neq$ dans $\mathbb{R}$, noté $r' < r$.

$$r = \frac{-2 - \sqrt{28}}{2(-2)} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \approx 1.83 \text{ et } r' = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} < 0$$

Lorsque $n \geq r$, on $\text{sgn}(-2n^2 + 2n - 3) = \text{sgn}(-2n^2) < 0$

$$\text{Conclusion : } \forall n \geq 2 \geq r, \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0$$

4. Justifiez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$

Comme $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Pour $a, b > 0$, on définit les nombres : $A_{a,b} = \frac{a+b}{2}$, $G_{a,b} = \sqrt{a \cdot b}$ et $H_{a,b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

Ce sont respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de a et b

- (a) Montrer que : Pour tout $a, b > 0$, $G_{a,b} \leq A_{a,b}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } a, b > 0, \text{ on a } A_{a,b} - G_{a,b} &= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{2(a+b + \sqrt{ab})} \\ &= \frac{(a-b)^2}{2(a+b + \sqrt{ab})} \geq 0 \text{ YES} \end{aligned}$$

Justifier que $G_{a,b} = A_{a,b}$ si et seulement si $a = b$.

$$\begin{aligned} \text{On a } G_{a,b} = A_{a,b} &\iff A_{a,b} - G_{a,b} = 0 \\ &\iff \frac{(a-b)^2}{2(a+b + \sqrt{ab})} = 0 \\ &\iff (a-b)^2 = 0 \iff a = b \end{aligned}$$

Conclusion : $G_{a,b} = A_{a,b}$ si et seulement si $a = b$.

- (b) Montrer que : Pour tout $a, b > 0$, $H_{a,b} \leq G_{a,b}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } a, b > 0, \text{ on a } G_{a,b} - H_{a,b} &= \sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \\ &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{(a+b)\sqrt{ab} - 2ab}{a+b} \\ &= \frac{(a+b)^2 ab - 4a^2 b^2}{(a+b)^2 ab} \\ &= \frac{ab(a^2 - 2ab + b^2)}{(a+b)^2 ab} = \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2 ab} \geq 0 \text{ YES} \end{aligned}$$

2. Pour $p \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$, on définit le nombre : $\mathcal{L}_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$ C'est la moyenne de Lehmer de a et b

- (a) On suppose que $0 < a \leq b$. Montrer que : $\mathcal{L}_p(a, b) \leq b$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } a, b > 0, \text{ on a } b - \mathcal{L}_p(a, b) &= b - \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}} \\ &= \frac{b(a^{p-1} + b^{p-1}) - a^p - b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}} \\ &= \frac{b \cdot a^{p-1} - a^p}{a^{p-1} + b^{p-1}} \\ &= \frac{a^{p-1}(b-a)}{a^{p-1} + b^{p-1}} \geq 0 \text{ YES} \end{aligned}$$

- (b) On fixe $s > 0$ et on considère la fonction $h: t \mapsto \frac{1 + (s)^t}{1 + (s)^{t-1}}$

Justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$

On sait que $s^t = e^{t \ln(s)}$ donc $(s)^t$ et $(s)^{t-1}$ se calculent

Ainsi la fonction f est fabriquée à l'aide des fonctions usuelles et des opérations classiques

Conclusion : la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t)$ est du signe de $(s-1)\ln(s)$.

$$\text{On va utiliser : } s^t = e^{t \ln(s)} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} [s^t] = \ln(s) \cdot e^{t \ln(s)} = \ln(s) \cdot s^t$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \forall t > 0, f'(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1 + (s)^t}{1 + (s)^{t-1}} \right] \\
&= \frac{\ln(s)(s)^t (1 + (s)^{t-1}) - (1 + (s)^t) \ln(s)(s)^{t-1}}{(1 + (s)^{t-1})^2} \\
&= \frac{\ln(s)(s)^t - \ln(s)(s)^{t-1}}{Bas > 0} \\
&= \frac{\ln(s)(s)^{t-1} [s - 1]}{Bas > 0}
\end{aligned}$$

Comme $(s)^{t-1} = e^{(t-1)\ln(s)} = e^{\square} > 0$, on a

Conclusion : $h'(t)$ est du signe de $(s-1)\ln(s)$.

En déduire que les variations de la fonction h .

On est déduire que $\forall t > 0, f'(t) \geq 0$ et on finalise avec un bô tableau

(c) Montrer que si p et q sont deux réels avec $p < q$, alors $\mathcal{L}_p(a, b) \leq \mathcal{L}_q(a, b)$.

On suppose que p et q sont deux réels avec $p < q$.

$$\text{On a : } \mathcal{L}_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}} = \frac{a^p}{a^{p-1}} \frac{1 + s^p}{1 + s^{p-1}} \text{ avec } s = b/a$$

Conclusion : $\mathcal{L}_p(a, b) = a f(p)$ et $\mathcal{L}_q(a, b) = a f(q)$ avec $s = b/a > 0$

Comme $0 < a, p < q$ et que f est croissante, on a bien : $\mathcal{L}_p(a, b) \leq \mathcal{L}_q(a, b)$

(d) Déterminer 3 réels p, q et r tel que $A_{a,b} = \mathcal{L}_p(a, b)$, $G_{a,b} = \mathcal{L}_q(a, b)$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}_r(a, b)$

On a facilement

$$\text{Pour } p = 1, \mathcal{L}_1(a, b) = A_{a,b}$$

$$\text{Pour } p = 0, \mathcal{L}_0(a, b) = H_{a,b}$$

$$\text{Pour } p = 1/2, \mathcal{L}_{1/2}(a, b) = G_{a,b}$$

Retrouver les inégalités que l'on a établies à la question Q1

On vient que voir que : Si $0 < p < q$, alors $\mathcal{L}_p(a, b) \leq \mathcal{L}_q(a, b)$.

On a donc : $\mathcal{L}_0(a, b) < \mathcal{L}_{1/2}(a, b) < \mathcal{L}_1(a, b)$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Démontrer que l'énoncé $H_{<2>}$ est vrai.

Je suppose que x_1 et x_2 sont > 0 et que $x_1 \cdot x_2 = 1$

On veut montrer
 $x_1 + x_2 \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x_1 + x_2 - 2 &= x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 \text{ car } x_1 \cdot x_2 = 1 \\ &= \frac{(x_1)^2 + 1 - 2x_1}{x_1} = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geq 0 \text{ Fini} \end{aligned}$$

2. On va démontrer que $H_{\langle 3 \rangle} \Rightarrow H_{\langle 4 \rangle}$.

- (a) Démontrer que, sur $]0, +\infty[$, la fonction g admet un minimum que l'on déterminera.

On étudie la fonction $g : x \mapsto x + \frac{3}{(x)^{\frac{1}{3}}}$

> La fonction g est dérivable sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} > \forall x > 0, \quad g'(x) &= \frac{d}{dx} \left[x + \frac{3}{(x)^{\frac{1}{3}}} \right]' = \left[x + 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \right]' \\ &= 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

> On a facilement : $g'(x) \iff x^{\frac{4}{3}} \geq 1 \iff x \geq 1$

> On fait une bête tableau de Signe-Variation

Et on conclut que Si $x > 0$, alors $g(x) \geq g(1) = 4$

- (b) En déduire $H_{<4>}$

On suppose que l'énoncé $H_{\langle 3 \rangle}$ est vrai

$$\left. \begin{array}{l} \text{CàD on suppose que } \square, \square', \square'' \text{ sont des réels } > 0 \\ \text{ET} \\ \square \times \square' \times \square'' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \square + \square' + \square'' \geq 3$$

on suppose que x_1, x_2, x_3, x_4 sont > 0 et que $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1$

On veut montrer $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$

Je J'applique $H_{\langle 3 \rangle}$ avec $\square = x_1 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$, $\square' = x_2 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$ et $\square'' = x_3 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$.

C'est possible car $\square, \square' \text{ et } \square''$ sont des nombres > 0

ET

$$\square \cdot \square' \cdot \square'' = x_1 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} \cdot x_2 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} \cdot x_3 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} = x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1$$

Ainsi on obtient $\square + \square' + \square'' = x_1 \times (x_4)^{1/3} + x_2 \times (x_4)^{1/3} + x_3 \times (x_4)^{1/3} \geq 3$

$$\Rightarrow (x_4)^{1/3} (x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{(x_4)^{1/3}}$$

On a maintenant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4$

$$\geq \frac{3}{(x_4)^{1/3}} + x_4 = g(x_4) \geq 4 \text{ FINI}$$

3. On suppose $H_{\langle n \rangle}$ ET

On suppose que $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont > 0 et que $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n+1} = 1$

On veut montrer $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} \geq n + 1$

Je considère $\square_1 = x_1 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$, $\square_2 = x_2 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$, ..., et $\square_n = x_n \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$.

Comme $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$ sont des nombres > 0 et que $\square_1 \cdot \square_2 \dots \square_n = \dots = 1$,
on peut appliquer $H \langle n \rangle$ avec $\square_1, \square_2, \dots, \square_n$

Ainsi on a $\square_1 + \square_2 + \dots + \square_n \geq n$

$$\Rightarrow x_1 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} + x_2 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} + \dots + x_n \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} \geq n$$

$$\Rightarrow \text{Donc on a } x_1 \times + x_2 + \dots + x_n \geq \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}}$$

Maintenant on a

$$x_1 \times + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (\dots) + x_{n+1} \geq \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}} + x_{n+1} = h(x_{n+1})$$

On étudie la fonction h définie par $h(x) = \frac{n}{(x)^{\frac{1}{n}}} + x$

On en déduit du tableau de variations que
Si $\square > 0$, alors $h(\square) \geq h(1) = n + 1$

$$\begin{aligned} \textbf{Conclusion : } x_1 \times + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} &\geq \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}} + x_{n+1} \\ &\geq h(x_{n+1}) = h(\square) \geq n + 1 \text{ Ouf, Fini !!!} \end{aligned}$$