

Les suites remarquables.		
	2 À la mode géométrique.	2
	3 Les suites Arithmético-Géométriques.	3
1 Vocabulaire, Quantificateur	1 4 Suites d'ordre 2.	4

1 Vocabulaire, Quantificateur

Définition 1.

Une suite numérique (réelle ou complexe), notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une liste d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indexées sur $\mathbb{N}$, CàD

Attention Il ne faut pas confondre : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le nombre u_n .

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\underbrace{u_0}_{n=0}, \underbrace{u_1}_{n=1}, u_2, \dots, \underbrace{u_{641}}_{n=641}, \dots, \underbrace{u_{2021}}_{n=1492}, \dots, \underbrace{u_{10^{24}}}_{n=10^{24}}, \dots \right)$$

Exemples

- > La suite constante égale à a , CàD $(a)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a, \dots, a, \dots)$, CàD $\forall n, u_n = a$
- > la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$ est une suite géométrique de raison a , on a $\forall n, u_n = a^n$
- > la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \dots, \dots)$, on a $\forall n, u_n = (-1)^n$

Définition 2. Vocabulaire générale

- > La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- > La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée
Ssi Il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- > La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
Ssi Il existe K tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$

Définition 3. Suite récurrentes

- > On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 Ssi
Ssi le nombre u_{n+1} s'exprime (entre autre) en fonction du précédent, CàD de u_n .
Faire des récurrence d'ordre 1 n'est jamais une mauvaise idée.
- > On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2 Ssi
Ssi le nombre u_{n+2} s'exprime (entre autre) en fonction des 2 précédents, CàD de u_{n+1} et u_n .
Faire des récurrence d'ordre 2 avec double initialisation n'est jamais une mauvaise idée.

2 À la mode géométrique.

Définition 4. À la mode géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de type/modèle géométrique

Ssi on a une relation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \underbrace{(Facteur)} u_n$

Remarque : il est possible que le facteur dépende de n , CàD $Facteur = F_n$.

À la mode géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite type/modèle géométrique, alors on a le calcul suivant

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &\leq F_{n-1} \underbrace{u_{n-1}} \\ &\leq F_{n-1} (F_{n-2} \underbrace{u_{n-2}}) \\ &\leq F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot (F_{n-3} u_{n-3}) \\ &\vdots \\ &\leq F_{n-1} F_{n-2} \dots (F_0 u_0) \end{aligned}$$

Théorème 5. Cv, div, chaos pour des suites géométriques.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

À l'aide du calcul "à la mode géo", on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$

Alors on a

- > Lorsque $q = 1$
alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à u_0 et donc elle converge vers u_0 .
- > Lorsque $|q| < 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
complément lorsque $0 < q < 1$ la suite est monotone et lorsque $-1 < q < 0$ la suite oscille.
- > Lorsque $q > 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $\pm\infty$ selon le signe de u_0 .
- > Lorsque $q \leq -1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chaotique CàD ne converge pas et ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Démonstration :

– Lorsque $q > 0$, on utilise $u_n = q^n u_0 = u_0 a^{bouge} = u_0 e^{n \ln(q)}$. Il y a 3 situations :

Situation 1 : $\ln(q) > 0 \iff q > 1$

on a alors $n \ln(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$

Situation 2 : $\ln(q) = 0 \iff q = 1$

la suite est constante égale à u_0

Situation 3 : $\ln(q) < 0 \iff q \in]0, 1[$

on a alors $n \ln(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

– Lorsque $q \in]-1, 0[$, on va mesurer la distance entre u_n et 0

$$|u_n - 0| = |u_n| = |q^n u_0| \leq |q|^n |u_0| = |u_0| \exp(n \ln |q|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } \ln |q| < 0$$

Donc la distance entre u_n et 0 tend vers 0

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3 Les suites Arithmético-Géométriques.

Définition 6. Les suites Arithmético-Géométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

> On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique

Ssi Il existe deux constantes a, b tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Une suite arithmético-géométrique est donc une suite récurrente d'ordre 1.

> La suite Homogène associée est la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = aH_n + \underline{0}$$

Théorème 7.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall n, u_{n+1} = au_n + b$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la somme de

> D'une suite particulière (K_n) *constante* et vérifiant la même récurrence

> De la suite Homogène associée $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = K_n + H_n$$

Démonstration par récurrence

> Comme (K_n) est une suite particulière *constante* et vérifiant la même récurrence,

$$\text{on a : } \forall n \in \mathbb{N}, K_n = K \text{ et } K_{n+1} = aK_n + b,$$

$$\text{ainsi } K = aK + b \implies K = \frac{b}{1-a} \text{ (lorsque } a \neq 1). \text{ Conclusion : lorsque } a \neq 1, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, K_n = \frac{b}{1-a}$$

> Comme (H_n) est la suite homogène associée,

$$\text{on a : } \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = aH_n,$$

$$\text{ainsi la suite } (H_n) \text{ est géométrique. Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, H_n = H_0 a^n$$

> On va démontrer par récurrence $H_{<n>}$: $u_n = K_n + H_n = \frac{b}{1-a} + H_0 a^n$

Initialisation $n = 0$

$$\text{On veut } u_0 = \frac{b}{1-a} + H_0 a^0 = \frac{b}{1-a} + H_0$$

$$\text{Je choisis } H_0 = u_0 - \frac{b}{1-a} \text{ et ça match!!!}$$

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

$$\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } u_{n+1} = \frac{b}{1-a} + H_0 a^{n+1}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b = a \left(\frac{b}{1-a} + H_0 a^n \right) + b \\ &= H_0 a^{n+1} + a \frac{b}{1-a} + b \\ &= H_0 a^{n+1} + \frac{ab + b(1-a)}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a} + H_0 a^{n+1} \quad \text{Yes!} \end{aligned}$$

Conclusion : le théorème est démontré et on a en bonus que $H_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$

4 Suites d'ordre 2.

Définition 8. Suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

> On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Ssi il existe a, b , tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

> On appelle alors équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\text{L'équation caractéristique} \quad X^2 = aX + b$$

Théorème 9. Calcul du nombre u_n en fonction de n .

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

Soit $X^2 = aX + b \iff X^2 - aX - b = 0$ son équation caractéristique et Δ , son discriminant.

Lorsque $\Delta > 0$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes r et r' dans $\mathbb{R}$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(r)^n + \mu(r')^n$ avec λ, μ des constantes.

Lorsque $\Delta = 0$

Alors l'équation caractéristique a 1 seule sol/racine $r = r'$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(r)^n + \mu(n r^n) = (\lambda + \mu n) r^n$ avec λ, μ des constantes.

Lorsque $\Delta < 0$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes r et r' dans $\mathbb{C}$

De plus $r = a + ib = \rho e^{i\theta}$ et $r' = \bar{r} = a - ib = \rho e^{-i\theta}$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(r)^n + \mu(r')^n$ avec λ, μ des constantes.

OU

$u_n = \alpha [\rho^n \cos(n\theta)] + \beta [\rho^n \sin(n\theta)]$ avec α, β des constantes.

Démonstration : Les 3 situations se font exactement pareilles.

Pour la démonstration, je suppose que $\Delta > 0$.

La démonstration se fait en 2 étapes.

> Étape 1 : On choisit finement λ et μ .

On veut que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu(r')^n$ donc cela doit être vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Je choisis λ et μ pour que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda r^0 + \mu(r')^0 = u_0 \\ \lambda r^1 + \mu(r')^1 = u_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r + \mu r' = u_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ 0 + \mu(r' - r) = u_1 - r u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 - \mu = u_0 - \frac{u_1 - r u_0}{r' - r} \\ \mu = \frac{u_1 - r u_0}{r' - r} \end{cases} \end{aligned}$$

> Étape 2 : On démontre maintenant par une récurrence à 2 étages

$$H_{<n>} : u_n = \lambda r^n + \mu(r')^n.$$

Initialisation : $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraies à cause de l'étape 1.

Hérédité : J'y vais rapide, je n'écris pas le "on suppose ...", ni le "on veut montrer"

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\
 &= a [\lambda r^{n+1} + \mu (r')^{n+1}] + b [\lambda r^n + \mu (r')^n] \\
 &= \lambda r^n (ar + b) + \mu (r')^n (ar' + b)
 \end{aligned}$$

Comme r et r' sont des solutions de l'équation caractéristique

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } ar + b &= r^2 \text{ et } ar' + b = r'^2 \\
 &= \lambda r^n (r^2) + \mu (r')^n (r')^2 \\
 &= \lambda r^{n+2} + \mu (r')^{n+2} \quad \text{fini.}
 \end{aligned}$$

Correction.