

Exercice 1. Les questions sont indépendantes

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Factoriser $a^5 - 2^5$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. calculer $\sum_1^n (3(k-1) - 2^{-2k})$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. calculer $\prod_2^n (3e^{2k})$

————— Fonction et Suite —————

Exercice 2. [Correction] Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$

1. On considère la fonction $h : x \mapsto e^{2x} - e^x - x$
 - (a) Justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$
et déterminer une fonction g telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (e^x - 1)g(x)$
 - (b) Déterminer les variations et le signe de fonction h .
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
CàD pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$
3. Dans cette question, on suppose que $a < 0$
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0$
 - (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq h(a)$.
(Indication : Ne pas faire de récurrence)
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n.h(a)$.
 - (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autour des Sommes

Exercice 3. [Correction] Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.
3. Application : Montrer, en utilisant la formule du binôme et Q2, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

Exercice 4. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$ On convient que $\binom{n}{n+1} = 0$
2. Montrer que : $\forall n, k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq n+1$

$$\frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}$$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$
4. Montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Exercice 5. [Correction]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^n}{n!} \geq n$

En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$

2. Montrer qu'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$

En déduire la valeur, pour $n \geq 2$ de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Justifier que pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k(k-1)}$.

(b) En déduire que : $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 - \frac{1}{n}$

(c) Montrer que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

Autour des intégrales

Exercice 6. [Correction] Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$p_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}.$$

1. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $\frac{\ln x}{x}$, CàD calculer $\int^x \frac{\ln t}{t} dt$
2. Étudier les variations sur $[3, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$
 En déduire que $\forall k \geq 3, \frac{\ln(k)}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$
3. En déduire une minoration de S_n puis que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$
4. Exprimer du produit p_n en fonction de S_n , en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

Exercice 7. [Correction] Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$$

On admet que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, le nombre $I(p, q)$ se calcule

1. Calculer $I(0, 0)$, $I(1, 0)$ et $I(1, 1)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I(p, 0)$
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable $t = 1 - s$, la relation de symétrie : $I(p, q) = I(q, p)$.
3. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.
4. En déduire la valeur de $I(p, 1)$, pour $p \in \mathbb{N}$, puis celle de $I(p, 2)$.
5. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$
6. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta$.

Indication : utiliser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$

Plus difficile

Exercice 8. [\[Correction\]](#) Moyenne logarithmique.

1. Montrer que : $\forall t > 0, t \leq \sinh(t) \leq t \cdot \cosh(t)$
2. En déduire que : Pour tout $x > 0$ avec $x \neq 1$, $\sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)} \leq \frac{x+1}{2}$
3. En déduire que : Pour tout a, b avec $0 < a < b$, $\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leq \frac{a+b}{2}$

Exercice 9. [\[Correction\]](#) Formule d'inversion de Pascal

On considère deux suites de nombres réels (f_n) et (g_n) liées par la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k$$

1. Soit p, k, n des entiers avec $0 \leq k \leq p \leq n$.

Démontrer que : $\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p}$

2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal, CàD $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p$

On admettra que : $\sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=0}^p \dots \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p=k}^n \dots \right)$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On considère la fonction $h : x \mapsto e^{2x} - e^x - x$

(a) Justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$

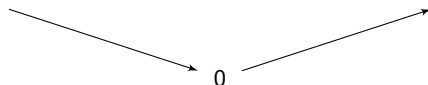
La fonction h est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

et déterminer une fonction g telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (e^x - 1)g(x)$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \frac{d}{dx} [e^{2x} - e^x - x] \\ &= 2e^{2x} - e^x - 1 \\ &= (e^x - 1)[2e^x + 1]\end{aligned}$$

(b) Déterminer le signe de fonction h .

Pour tout $x \in \mathbb{R}, 2e^x + 1 \geq 1$, on a donc le tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sgn}(e^x - 1)$	$-$	0	$+$
$\text{sgn } h'(x)$	$-$	0	$+$
h			

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$, CàD la fonction h est positive

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. CàD pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = h(u_n) = h(\square) \geq 0$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. Dans cette question, on suppose que $a < 0$

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0$

On fait par récurrence $H_{<n>} : u_n \geq 0$

Initialisation $n = 0$

Comme $u_0 = a < 0$ donc $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $u_{n+1} \leq 0$

$$\begin{aligned}\text{On a } u_{n+1} &= e^{2u_n} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n} [e^{u_n} - 1]\end{aligned}$$

On sait que $e^{u_n} > 0$ et que $e^{u_n} - 1 < 0$ car d'après $H_{<n>}$, on sait que $u_n < 0$

Conclusion : $u_{n+1} \leq 0$ FINI

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers $\ell \leq 0$

4. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq h(a)$.

$$\begin{aligned}\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_{n+1} - u_n &= [e^{2u_n} - e^{u_n}] - u_n \\ &= h(u_n)\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc $u_n \geq u_0 = a \geq 0$ et la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n = h(u_n) \geq h(a)$

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n.h(a)$.

Par récurrence ou à la mode gép

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $a > 0$, on sait que $h(a) > 0$ donc $a + n.h(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}} \binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k} \binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1}$$

On a

$$G - p = \frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1) - 2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1) + 2k}{n(k+1)} \geq 0 \quad \text{car } k \geq 1$$

2. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

À la mode geo ou récurrence

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$ On convient que $\binom{n}{n+1} = 0$

À cause de la convention, $\binom{n}{n+1} = 0$

$$\text{ainsi } S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

$$\text{On a donc } S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k}}{k} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

On regroupe les sommes

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$$

2. Montrer que : $\forall n, k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq n+1$ $\frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}$

Pour $k \in \{1, 2, \dots, (n+1)\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] &= \frac{1}{k} \left[\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \\ &= \frac{1}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{(n+1)}{(n+1-k)} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{k}{(n+1-k)} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

On va calculer cette somme avec la formule du binôme

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \square^k \quad \text{avec } \square = -1 \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \square^k \binom{n+1}{k} - \frac{1}{\square^0} \right] \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[(1 + \square)^{n+1} - 1 \right] \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[(1 - 1)^{n+1} - 1 \right] = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

4. Montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\text{On a "à la mode Géo" } S_n = \frac{1}{n} + S_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n-1} + S_{n-2} \right]$$

⋮

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \left[\frac{1}{2} + S_1 \right]$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \quad \text{Car } S_1 = 1$$

Conclusion : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^n}{n!} \geq n$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \frac{n^n}{n!} &= \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n}{n} \frac{n}{n-1} \frac{n}{n-2} \dots \frac{n}{2} \frac{n}{1} \\ &\geq 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n = n \end{aligned}$$

En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$

Comme $n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $\frac{n^n}{n!} \geq n$, la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ diverge vers ∞

2. Montrer qu'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \geq 2, \text{ on a } \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} &= \frac{a \cdot (k-1) + b \cdot k}{k(k-1)} \\ &= \frac{k(a+b) - a}{k(k-1)} \end{aligned}$$

$$\text{On choisit } \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \iff a=-1 \text{ et } b=1$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

En déduire la valeur, pour $n \geq 2$ de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$

$$\text{pour } n \geq 2, \text{ avec un télescopage, on a : } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- (a) Justifier que pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k(k-1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

Pour majorer A/B

$$= \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{k(k-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n^k}{k(k-1)}$$

- (b) En déduire que : $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{n^k}{k(k-1)} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- (c) Montrer que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

$$\begin{aligned} \text{On a } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \underbrace{\binom{n}{0} \frac{1}{n^0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} \frac{1}{n^1}}_{k=1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 3 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $\frac{\ln x}{x}$, CàD calculer

$$\int^x \frac{\ln t}{t} dt$$

$$\text{On a : } \int^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\ln(t) \cdot \ln(t) \right]^x - \int^x \frac{\ln t}{t} dt$$

$$\text{Ainsi } 2 \int^x \frac{\ln t}{t} dt = \ln^2(x)$$

$$\text{Conclusion : } \int^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

2. Étudier les variations sur $[3, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

> La fonction f est dérivable sur $[3, +\infty[$.

$$> \forall x \geq 3, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

> D'où le bô tableau

Conclusion : La fonction f est décroissante sur $[3, +\infty[$

$$\text{En déduire que } \forall k \geq 3, \frac{\ln(k)}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

> Pour $t \in [k, k+1]$ avec $k \geq 3$

$$\text{on a } t \geq k \geq 3 \text{ et } f \text{ décroissante sur } [3, +\infty[\text{ donc } \frac{\ln(t)}{t} = f(t) \leq f(k) = \frac{\ln(k)}{k}$$

> On intègre l'inégalité de $t = k$ à $t = k+1$

$$\text{Ainsi } \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

3. En déduire une minoration de S_n

On somme l'inégalité précédente de $k=3$ à $k=n$,

$$\text{Ainsi } \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

$$\text{On a donc } S_n \geq \underbrace{0}_{k=1} + \underbrace{\ln(2)/2}_{k=2} + \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

Puis que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt &= \int_3^4 \dots + \int_4^5 \dots + \dots + \int_n^{n+1} \dots \\ &= \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } S_n \leq \underbrace{\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}}_{=M_n} \text{ et } M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Ainsi (théorème de comparaison) la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

4. Exprimer du produit p_n en fonction de S_n , en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$

$$\text{On a } p_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{k} = \prod_{k=1}^n k^{1/k} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{\ln(k)}{k}}$$

$$\text{Donc } p_n = \prod_{k=1}^n e^{\frac{\ln(k)}{k}} = \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \right] = e^{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

[Une intégrale paramétrée par deux entiers]

1. Calculer $I(0,0)$, $I(1,0)$ et $I(1,1)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I(p,0)$

$$\text{On a } I(0,0) = \int_0^1 1 \cdot 1 dt = 1$$

$$I(1,0) = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I(1,1) = \int_0^1 t \cdot (1-t) dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I(p, 0)$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I(p, 0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable $t = 1 - s$, la relation de symétrie : $I(p, q) = I(q, p)$.

$$\text{On a } \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_1^0 (1-s)^p s^q (-ds) = \int_0^1 s^q (1-s)^p ds$$

Conclusion : $I(p, q) = I(q, p)$.

3. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$.

On a $I(p, q+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^{q+1} dt$. On fait une IPP

$$\begin{cases} u(t) = (1-t)^{q+1} & \rightsquigarrow & u'(t) = -(q+1)(1-t)^q \\ v'(t) = t^p & \rightsquigarrow & v(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \int_0^1 t^p (1-t)^{q+1} dt = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} (1-t)^{q+1} \right]_0^1 - \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 -t^{p+1} (1-t)^q dt \\ &= 0 + \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^q dt \\ &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \end{aligned}$$

4. En déduire la valeur de $I(p, 1)$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, la formule précédente avec $q = 0$ donne :

$$I(p, 1) = \frac{1}{p+1} I(p+1, 0)$$

$$\text{Or, d'après la question Q1, } I(p+1, 0) = \frac{1}{p+2}.$$

$$\text{Conclusion : Pour tout } p \in \mathbb{N}, I(p, 1) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

Puis celle de $I(p, 2)$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, la formule précédente avec $q = 1$ donne :

$$I(p, 2) = \frac{2}{p+1} I(p+1, 1)$$

$$\text{On vient de voir que : } I(p+1, 1) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}.$$

$$\text{Conclusion : Pour tout } p \in \mathbb{N}, I(p, 2) = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

5. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$

On fait par récurrence.

$$H_{<q>} : \left| \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} \right|$$

Initialisation avec $n = 0$

$$\text{On sait que } \forall p \in \mathbb{N}, I(p, 0) = \frac{1}{p+1} \text{ et } \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$$

Donc $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité : On suppose $H_{<q>}$.

On va montrer $H_{<q+1>}$

$$\text{CàD } \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q+1) = \frac{p! (q+1)!}{(p+q+2)!}$$

On a $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$

On applique $H_{<q>}$, Ça donne $I(p+1, q) = \frac{(p+1)! q!}{((p+1) + q + 1)!} = \frac{(p+1)! q!}{(p+q+2)!}$

$$= \frac{(q+1)}{(p+1)} \frac{(p+1)! q!}{(p+q+2)!}$$

$$= \frac{p! (q+1)!}{(p+q+2)!}$$

Donc $H_{<q+1>}$ est vrai

6. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Montrons que $J(p, q) = I(p, q)$. On commence par écrire :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} &= (\sin^2 \theta)^p (\sin \theta) (\cos^2 \theta)^q (\cos \theta) \\ &= (\sin^2 \theta)^p (1 - \sin^2 \theta)^q \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $[t = \sin^2(\theta); dt = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta]$ dans $J(p, q)$:

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^p (1 - \sin^2 \theta)^q \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \frac{1}{2} I(p, q)$$

Finalement : $J(p, q) = \frac{1}{2} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall t > 0, t \leq \sinh(t) \leq t \cdot \cosh(t)$

> La fonction $\sinh$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$

donc $\forall x > 0, \sinh(t) \geq \underset{\text{Eq de la tge en } t=0}{t}$

> On étudie la fonction $h: t \mapsto t \cdot \cosh(t) - \sinh(t)$

2. En déduire que : Pour tout $x > 0$ avec $x \neq 1, \sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)} \leq \frac{x+1}{2}$

Pour $x > 1$. J'applique l'inégalité précédente avec $t = \ln(\sqrt{x}) > 0$, ainsi

$$\ln(\sqrt{x}) \leq \sinh(\ln(\sqrt{x})) \leq \ln(\sqrt{x}) \cdot \cosh(\ln(\sqrt{x}))$$

On ré-organise

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{2} \leq \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2} \leq \frac{\ln(x)}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}} \leq \ln(x) \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

Comme $x > 1$, on a $\ln(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)} \leq \frac{x+1}{2}$$

Pour $x \in]0, 1[$. J'applique l'inégalité précédente avec $t = -\ln(\sqrt{x}) > 0$, ainsi

3. En déduire que : Pour tout a, b avec $0 < a < b, \sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leq \frac{a+b}{2}$

Pour tout a, b avec $0 < a < b$. On divise par $a > 0$, ainsi

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\frac{b}{a}-1}{\ln \frac{b}{a}} \leq \frac{\frac{b}{a}+1}{2}$$

J'applique l'inégalité précédente avec $x = \frac{b}{a} > 1$, ainsi ...

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

- Exprimer f_0 , f_1 et f_2 en fonction de g_0 , g_1 et g_2 .

Facile

- Calculer le nombre f_n dans les situations suivantes :

- $\forall k \in \mathbb{N}, g_k = 1$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

- $\forall k \in \mathbb{N}, g_k = (-1)^k$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1+(-1))^n = 0^n = 0$$

- $\forall k \in \mathbb{N}, g_k = e^{ak}$ où a est un nombre fixé.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ak} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^a)^k = (1+e^a)^n$$

- Soit p, k, n des entiers avec $0 \leq k \leq p \leq n$. Démontrer que : $\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p} \quad \text{car } \binom{n-k}{n-p} = \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} \end{aligned}$$

- Démontrer la formule d'inversion de Pascal, CàD $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p &= \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} g_k \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p (-1)^{n-p} \underbrace{\binom{n}{p} \binom{p}{k}}_{\binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p}} g_k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \underbrace{\binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p}}_{\binom{n}{k} \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n-k}{n-p}} g_k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(g_k \binom{n}{k} \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n-k}{n-p} \right) \end{aligned}$$

On ré-indexe la somme d'indice p avec $u = p - k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \left(g_k \binom{n}{k} \sum_{u=0}^{n-k} (-1)^{n-k-u} \binom{n-k}{u} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(g_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{u=0}^{n-k} (-1)^u \binom{n-k}{u} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(g_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1-1)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

Or $(1-1)^{n-k} = 0^{n-k} = 0$ SAUF quand $n-k=0$!!!

Donc il ne reste que la plateau $k = n$

$$= \underbrace{g_n \binom{n}{n} (-1)^{n-n} 0^0}_{k=n} = g_n \quad \text{OUF}$$