

Programme de colle de la semaine 5

du Lundi 12 Octobre au Vendredi 16 Octobre.

Questions de cours.

> Mon métier : Banquier.

Vous empruntez un capital $C_0 = 100\,000$ euros à un taux **mensuel** de i sur $N = 144$ de mois.

On note C_n , le capital restant à rembourser au mois n . On admet que : le capital suit la relation

$$C_{n+1} = C_n + iC_n - M$$

où M désigne votre mensualité (fixe).

1. Calculer C_n en fonction de n .
2. Déterminer M afin que $C_{144} = 0$, CàD vous avez fini de rembourser, vous ne devez plus rien à la banque
3. **Bonus** : Demander à votre colleur d'expliquer la relation : $C_{n+1} = C_n + iC_n - M$ et le lien entre taux **mensuel** et taux **annuel**.

> Suite classique d'ordre 2. Soit (F_n) la suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Calculer F_n en fonction de n .

Question Bonus : En manipulant le binôme et les sommes, donner une expression de F_n .

> Trigo On considère : $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

Montrer que : $\forall n \geq 2$, $P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

> Polynôme de Chebychev.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un polynôme T_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Vous pouvez faire seulement $n = 4$.

Indication / Rappel : $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$

> Somme de trigo. **Correction page 2** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Justifier, avec l'angle moitié, que : $|\omega^k - 1| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que : $S_n = \sum_{k=0}^n |\omega^k - 1| = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Pour calculer S_n , on peut soit utiliser : $\sin \square = \operatorname{Im}(e^{i\square})$ soit utiliser la clef qui est en Bas

> Tangente

Définition Tangente et Tangente Principales. Propriétés de la fonction tangente.

Démonstration que Tangente est π -périodique.

Dérivée de $\tan$

Calcul de $\tan(a+b)$, de $\tan(a-b)$ et $\tan(2x)$.

Exercices.

Suites classiques (Geo, arithmético-Geo, Classique d'ordre 2), Trigo et même arc-trigo.

Une petite semaine "perturbée" : lundi, je fais tangente ; Mardi je commence arc-trigo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Justifier, avec l'angle moitié, que : $|\omega^k - 1| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ on a } \omega^k - 1 &= e^{ik2\pi/n} - 1 \\ &= e^{ik\pi/n} \left[e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n} \right] \\ &= e^{ik\pi/n} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\pi/2} e^{ik\pi/n} \end{aligned}$$

pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $2 > 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Conclusion : $|\omega^k - 1| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Montrer que : $S_n = \sum_{k=0}^n |\omega^k - 1| = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=0}^n |\omega^k - 1| &= \sum_{k=0}^n 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \text{Im}\left(e^{ik\pi/n}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\pi/n}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\sum_{k=0}^n \square^k\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\frac{1 - \square^{n+1}}{1 - \square}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\pi/n}}{1 - e^{i\pi/n}}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)\pi/2n} [2i \sin((n+1)\pi/2n)]}{e^{i\pi/2n} [2i \sin(\pi/2n)]}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(\underbrace{e^{in\pi/2n}}_{=i} \frac{\sin((n+1)\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}\right) \\ &= 2 \text{Im}\left(i \frac{\sin((n+1)\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}\right) \\ &= 2 \frac{\sin((n+1)\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On finalise avec } \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2n}\right) &= \sin\left(n\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) \\ &= S_a C_b + C_a S_b = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$