

TD 4 Étude(s) de fonction.

Vendredi 25 Septembre 2026.

_____ 1-ième heure. _____

Exercice 1. Pour les fonction suivantes, déterminer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et calculer f'

$$f(x) = \ln(2-x), \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(\ln(x))}$$

Exercice 2. [Correction] On admet que la fonction arcsin définie, continue sur $[-1, 1]$, dérivable sauf aux bornes, CàD sur $] -1, 1[$

$$\text{et que } \forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Étudier la fonction } f \text{ définie par } f: x \mapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x-1)$$

Exercice 3. On veut montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, ab \leq b \ln b + e^{a-1}$

Idee : On va étudier la fonction $h: x \mapsto \text{Gros} - \text{petit}$.

Comme il y a 2 "variables", on doit en fixer l'une et faire varier l'autre, CàD

$$\text{on va étudier } h: x \mapsto (x \ln x + e^{a-1}) - (ax) \quad \text{OU BIEN} \quad \text{on va étudier } h: x \mapsto (b \ln b + e^{x-1}) - (xb)$$

Les filles faites l'une et les garçons l'autre.

_____ 2-ième heure. _____

Exercice 4. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$
et que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.
3. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (a) Méthode 1. En montrant, *sans récurrence*, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$
 - (b) Méthode 2. En montrant, *par récurrence*, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ℓ .
On sait/admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ
5. Étude de $|u_n - \ell|$, la distance entre u_n et ℓ
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.
 - (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$.

_____ Si je m'ennuie _____

Exercice 5. [Correction] Montrer, *en cheminant*, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Exercice 6. [Correction]

1. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$

Rappel : on utilisera la phrase : " J'applique l'inégalité avec ...

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Étudier la fonction f définie par $f : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x-1)$

> On peut calculer $f(x)$ Ssi $\begin{cases} \arcsin(\square) \text{ se calcule, CàD } -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ \sqrt{\square} \text{ se calcule, CàD } x \geq 0 \\ \arcsin(\square') \text{ se calcule, CàD } -1 \leq 2x-1 \leq 1 \end{cases}$

Conclusion : La fonction f est définie sur $[0, 1]$

De plus la fonction f est fabriquée avec les fonctions usuelles et les opérations classiques

Conclusion : La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$

$$\begin{aligned} > \forall x \in]0, 1[, \text{ on a } f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x-1) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} - \frac{1}{2} 2 \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

> D'où le tableau

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

On va étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

> La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned} > \forall x \geq \sqrt{2}, f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-2}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2 - 2}{x^2} \geq 0 \text{ car } x \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

> D'où le tableau

Conclusion : la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

Montrer que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall x \geq \sqrt{2}, |f'(x)| &= f'(x) \text{ et } \forall x \geq \sqrt{2}, \frac{1}{2} - |f'(x)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-2}{x^2} \right) \\ &= \frac{-1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \geq \sqrt{2}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

D'après le TAF, la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

On fait par récurrence $H_{<n>} : \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$

Initialisation $n = 0$

Comme $u_0 = 2$, $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \leq u_n \leq 2 \\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{f(\sqrt{2})}_{=\sqrt{2}} \leq f(u_n) \leq \underbrace{f(2)}_{3/2 < 2}$$

Conclusion : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ Yes

3. On va montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (a) Méthode 1. En montrant, sans récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(-u_n + \frac{2}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 - u_n^2}{u_n} \right) \leq 0 \text{ car } u_n \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

- (b) Méthode 2. En montrant, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

On fait par récurrence $H_{<n>} : u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation $n = 0$

Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{3}{2}$, $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$

Conclusion : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ Yes

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ℓ .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geq \sqrt{2}$

On sait/admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ

On a $f(\ell) = \ell \iff \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) = \ell$. On ré-organise et on trouve $\frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) = \ell \iff \ell^2 = 2$

Ainsi $\ell = +\sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$.

Conclusion. Comme $\ell \geq \sqrt{2}$ on a forcément $\ell = \sqrt{2}$

5. Étude de $|u_n - \ell|$, la distance entre u_n et ℓ

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu à la question Q1 que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, +\infty[$,

CàD $\forall x, x' \geq \sqrt{2}, |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$

On applique cette inégalité avec $x = u_n \geq \sqrt{2}$ et $\ell = \sqrt{2}$

Conclusion : $\left| \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} - \underbrace{f(\ell)}_{=\ell} \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$

- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$.

On fait par récurrence $H_{<n>} : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Montrer, en cheminant, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout/chaque } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\dots)^2 - (\dots)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$,

$$\text{Ainsi } \forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq \underset{\text{tgt en } 0}{\overset{\text{tgc}}{x}}$$

2. On va montrer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on chemine

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a^{\text{bouge}} = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = \frac{1}{n} > 0$

$$\leq e^{n \frac{1}{n}} = e^1 = e$$

On va montrer $e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$

Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on chemine

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = a^{\text{bouge}} = e^{-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Pour minorer A-B, on majore B

On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = -\frac{1}{n} > -1$

$$\text{ainsi } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$$

$$\geq e^{-n\left(-\frac{1}{n}\right)} = e$$