

L'académie

Exercice 1. [Correction] Calculer les sommes/produit suivants

1. Calculer : $\sum_{i=0}^n i(i+2)$, $\sum_{k=n}^{3n} (3k-1)$, *Bonus* $\sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$
2. Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Calculer les sommes suivantes $\sum_{k=0}^n (2^{2k+n} \cdot 3^{n-3k})$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k x^k$
3. **Bonus** Calculer les produits suivants $\prod_{k=1}^n (2k \cdot 2^k)$, $\prod_{k=1}^n (-2)^k$

Exercice 2. [Correction] Simplifier $(n+1)! - n!$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$

Sommes classiques.

Exercice 3. [Correction] Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

Exercice 4. [Correction] Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$
En déduire, à l'aide d'un télescopage, la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercices classiques

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{3k+1}{3^k}\right)$

1. Montrer que : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq 3/2$
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n$

Exercice 7. [Correction] On admet dans cette exercice que les sommes infinies se manipulent comme des sommes finies.

Sachant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $A = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ puis $B = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Bonus

Exercice 8. [Correction] Rappel : On sait que $2017 = 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$

Calculer $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}}$ puis $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}}$

Exercice 9. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C} - \{1\}$. L'objectif est de calculer $\sum_{k=1}^n kx^k$

1. Méthode 1.
Montrer, par récurrence, que $\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
2. Méthode 2. Astuce. En utilisant la ré-indexation $k = p+1$.
3. Méthode 3. La bonne méthode est de remarquer que : $[x^k]' = kx^{k-1}$ ainsi $kx^k = x[x^k]'$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On a

1. On a

$$\begin{aligned}
 &> \sum_{k=n}^{3n} (3k-1) = 3 \sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3 \left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \right] - 1(3n - n + 1) \\
 &> \sum_{i=0}^n i(i+2) = \sum_{i=0}^n (i^2 + 2i) = \sum_{i=0}^n i^2 + 2 \sum_{i=0}^n i \\
 &> \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n) = \sum_{k=1}^n \max(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k, n) = \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=n+1}^{2n} k
 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (2^{2k+n} \cdot 3^{n-3k}) &= \sum_{k=0}^n 2^n (2^2)^k 3^n (3^{-3})^k \\
 &= 2^n 3^n \sum_{k=0}^n (2^2 3^{-3})^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \square^k \quad \text{avec } \square = \frac{2^2}{3^3} \\
 &= \frac{1 - \square^{n+1}}{1 - \square} = \frac{1 - \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2^2}{3^3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k &= \sum_{k=0}^n (-x)^k \\
 &= \sum_{k=1}^n \square^k \quad \text{avec } \square = -x \\
 &= \sum_{k=1}^n \square^k - \underbrace{1}_{k=0} \\
 &= \frac{1 - \square^{n+1}}{1 - \square} - 1 = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x} - 1
 \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^n (2k \cdot 2^k) &= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 2^1}_{k=1} \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2^2}_{k=2} \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 2^3}_{k=3} \dots \underbrace{2 \cdot n \cdot 2^n}_{k=n} \\
 &= (2 \cdot 2 \dots 2) (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) (2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^n) \\
 &= 2^n n! 2^{1+2+3+\dots+n} \\
 &= 2^n n! 2^{n(n+1)/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^n (-2)^k &= \underbrace{(-1)^1 2^1}_{k=1} \underbrace{(-1)^2 2^2}_{k=2} \underbrace{(-1)^3 2^3}_{k=3} \dots \underbrace{(-1)^n 2^n}_{k=n} \\
 &= (-1)^{n(n+1)/2} (2)^{n(n+1)/2}
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Simplifier $(n+1)! - n!$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$

Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! - n! = n \cdot n!$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(k+1)! - k!}_{k=k} \\
 &= \underbrace{2! - 1!}_{k=1} + \underbrace{3! - 2!}_{k=2} + \underbrace{4! - 3!}_{k=3} + \dots + \underbrace{(n+1)! - n!}_{k=n} \\
 &\quad \text{Télescopage} \\
 &= (n+1)! - 1
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$
pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^n \square^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \quad \text{avec } \square = -x^2 \\ &= \frac{1 - \square^{n+1}}{1 - \square} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2} + (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2) + b k(k+2) + c k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{a[k^2 + 3k + 2] + b[k^2 + 2k] + c[k^2 + k]}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2[a + b + c] + k[3a + 2b + c] + [2a]}{k(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité espérée, je choisis

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \iff a = 1/2, b = -1, c = 1/2$$

Ainsi on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$

En déduire, à l'aide d'un télescope, la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{3}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5}}_{k=3} + \dots \\ &\quad \text{Télescope} \\ &= \underbrace{\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2}}_{\text{reste du plateau } k=1} + \underbrace{\frac{1/2}{2}}_{\text{reste du plateau } k=2} + \underbrace{\frac{1/2}{n+1}}_{\text{reste du plateau } k=n-1} + \underbrace{\frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}}_{\text{reste du plateau } k=n} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \text{On ré-indexe avec } k = 2p \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

De plus $\sum_{\text{tous}} \dots = \sum_{\text{pair}} \dots + \sum_{\text{impair}} \dots$, ainsi

$$\sum_{\text{impair}} \frac{1}{k^2} = \sum_{\text{tous}} \frac{1}{k^2} - \sum_{\text{pair}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ fois}} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{1-10^n}{1-10} = \frac{10^n-1}{9}$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 11 + \cdots + \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ fois}} &= \sum_{k=1}^n \frac{10^k - 1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left[\sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n \right] = \frac{10^{n+1} - 9n - 1}{9^2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On a

1. facile
2. Méthode 2. On a

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n k x^k \\ &\quad \text{On ré-indexe avec } p = k + 1 \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1) x^{k+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1) x^k x \\ &= x \sum_{p=0}^{n-1} k x^k + x \sum_{p=0}^{n-1} x^k \\ &= x S_{n-1} + x \times (\text{Somme Géo}) \\ &= x(S_n - n x^n) + x \times (\text{Somme Géo}) \\ &\quad \text{On en déduit la valeur de } S_n \end{aligned}$$

3. Méthode 3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k x^k &= \sum_{k=1}^n x [x^k]' \\ &= x \sum_{k=1}^n x [x^k]' \\ &= x \left[\sum_{k=1}^n x^k \right]' \\ &= x \left[\sum_{k=0}^n x^k - \underbrace{1}_{k=0} \right]' \\ &= x \left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \right]' \end{aligned}$$