

TD 6 Primitive(s)-Suites classiques

Vendredi 07 Octobre 2026.

Exercice 1. [\[Correction\]](#) Calculer une primitive pour les fonctions suivantes

$$2x^4 - 5x^3 - \frac{1}{2x} + e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$(2t+1)^3 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \text{ Sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \text{ Sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$(t^4 + t + 1) \sqrt[3]{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\sin(3x) - e^{-2x} + \frac{1}{1+x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\cos(x/2) - e^{3x} + \frac{1}{1-x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Exercice 2. [\[Correction\]](#) Calculer une primitive pour les fonctions suivantes

$$\tan(t) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2 [$$

$$te^{-3t^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{t^2}{1+t^3} + \frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{t \ln(t)} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 3. [Correction] Soit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

À l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

Exercice 4. [Correction]

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2, u_1 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$$

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.
2. Calculer le nombre u_n en fonction de n .
3. En utilisant G-p, montrer que : $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$.

$$\text{On a donc } (3 - \sqrt{5})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4. Dédurre de ce qui précède que : la suite $\left(\sin\left[\left(3 + \sqrt{5}\right)^n \pi\right]\right)$ converge vers 0.

Indication Méthodologie : C'est un cheminement "naturel", Il faut faire le lien entre $(3 + \sqrt{5})^n \pi$ et ce qui précède

> Avec Q2, on a $(3 + \sqrt{5})^n = \dots$. On remplace.

> Avec Q1, on peut gérer sachant que la fonction Sinus est 2π -périodique.

> Enfin avec Q3, on finit

Exercice 5. [Correction] Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

Montrer, par récurrence en utilisant la formule trigo ..., que :

$$\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Exercice 6. [Correction] Montrer, en utilisant une formule trigo, que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

Exercice 7. Mon possible métier : Banquier

Vous empruntez un capital $C_0 = 100\,000$ euros à un taux **mensuel** de i sur $N = 144$ de mois.

On note C_n , le capital restant à rembourser au mois n . On admet que : le capital suit la relation

$$C_{n+1} = C_n + iC_n - M$$

où M désigne votre mensualité (fixe).

1. Calculer C_n en fonction de n .
2. Déterminer M afin que $C_{144} = 0$, CàD vous avez fini de rembourser, vous ne devez plus rien à la banque

Application : vous pouvez maintenant expliquer à vos parents et leur banquier comment est calculé la mensualité M d'un prêt à taux fixe.

3. Bonus : Dans la pratique, le banquier vous donne le taux I le TEG, i.e le Taux Effectif Global **annuel**.

(a) Montrer que $1 + I = (1 + i)^{12}$

(b) Montrer que $\forall x > 0, (1 + x)^{1/12} > 1 + \frac{x}{12}$

En déduire que $i < \frac{I}{12}$.

(c) Que peut-on déduire de ce calcul ?

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

$$2x^4 - 5x^3 - \frac{1}{2x} + e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$2\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln|x| + (-1)e^{-x}$$

$$(2t+1)^3$$

$$\frac{1}{8}(2t+3)^4$$

$$\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \text{ Sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\sqrt{2} \text{ Monôme } + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Monôme}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \text{ Sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Monôme} + \text{Monôme}$$

$$\left(t^4 + t + 1\right) \sqrt[3]{t} = t^{4+1/3} + t^{1/3} + t^{1/3}$$

$$\text{Monôme} + \text{Monôme} + \text{Monôme}$$

$$\sin(3x) - e^{-2x} + \frac{1}{1+x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\frac{-1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{(-2)} e^{-2x} + \ln|1+x|$$

$$\cos(x/2) - e^{3x} + \frac{1}{1-x} = \cos(x/2) - e^{3x} \ominus \frac{1}{x-1}$$

$$2\sin(x/2) - \frac{1}{3} e^{3x} - \ln|x-1|$$

$$\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \ominus \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{2} \ln|2x-1| + \frac{-1}{x-1}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$\tan(t) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\square'}{\square}$$

$$-\ln|\cos(x)|$$

$$te^{-3t^2} = \square' e^{\square}$$

$$\frac{1}{(-3)}e^{-3t^2}$$

$$\frac{t^2}{1+t^3} + \frac{t}{1+t^2} = \frac{\square'}{\square} + \frac{\square'}{\square}$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+t^3| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2|$$

$$\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{1/t}{\ln(t)} = \frac{\square'}{\square}$$

$$\ln|\ln(x)|$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.

On fait par récurrence (2 étages), $H_{<n>}$: le nombre u_n est un entier pair.

> Initialisation avec $n=0$ et $n=1$

Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$ donc $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraies

> Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On a $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$

On applique $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

CàD $u_n = 2p$ et $u_{n+1} = 2p'$

$$= 62p' - 42p$$

$$= 2 \left[\underbrace{6p' - 4p}_{\in \mathbb{Z}} \right]$$

Conclusion : $H_{<n+2>}$ est vraie

2. Calculer le nombre u_n en fonction de n .

C'est une suite récurrente d'ordre 2 classique

Finalement on trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$

3. En utilisant G-p, montrer que : $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$. On a

$$\text{On a : } 3 - \sqrt{5} = \frac{(3)^2 - (\sqrt{5})^2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{9 - 5}{3 + \sqrt{5}} > 0$$

ET

$$1 - (3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 = \frac{5 - 4}{\sqrt{5} + 2} > 0$$

Conclusion : On a bien : $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$.

4. Dédurre de ce qui précède que : la suite $\left(\sin \left[(3 + \sqrt{5})^n \pi \right] \right)$ converge vers 0.

On a le cheminement naturel

$$\begin{aligned} \sin \left[(3 + \sqrt{5})^n \pi \right] &= \sin \left[(u_n - (3 - \sqrt{5})^n) \pi \right] \\ &= \sin \left[u_n \pi - (3 - \sqrt{5})^n \pi \right] \end{aligned}$$

Or u_n est un nombre pair

donc on peut écrire $u_n = 2k$

$$= \sin \left[2k\pi - (3 - \sqrt{5})^n \pi \right]$$

Or la fonction Sinus est 2π -périodique

Donc

$$= \sin \left[- (3 - \sqrt{5})^n \pi \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car } (3 - \sqrt{5})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

Montrer, par récurrence en utilisant la formule trigo, que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.

On fait par récurrence $H_{<n>} : P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

> Initialisation $n = 2$

$$\text{On a } P_2 = \prod_{k=2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{et } \frac{1}{2^{2-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} = \dots = 1 \quad \text{Donc } H_{<2>} \text{ est vraie}$$

> Hérité. On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$

$$\begin{aligned} \text{On a } P_{n+1} &= \prod_{k=2}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}_{k=n+1} \end{aligned}$$

On applique $H_{<n>}$

$$= \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

On sait (duplication) que : $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dots = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$$\frac{1}{2^{n-1} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

Montrer, en utilisant une formule trigo, que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \text{On utilise la formule } C_a C_b$$

$$C_a C_b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta)] - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(-n\theta) - \cos(n\theta)$$

Or la fonction Cosinus est paire

$$= \cos((n+2)\theta) \quad \text{YES}$$