

Exercice 1. [Correction]

- Vérifier que : $(2 + \sqrt{3})^0, (2 + \sqrt{3})^1, (2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^4$
sont des mélanges de (1) et de $(\sqrt{3})$ avec des pondérations dans $\mathbb{Z}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer **par récurrence** qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.
De plus on exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.
En déduire a_n en fonction de n .
- Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

Exercice 2. [Correction] On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

- Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.
- Méthode 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Je note : $A = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.
 - > Le nombre A est solution d'une équation ; laquelle ?
 - > Donner la formule de $\tan(a-b)$.
En déduire que le nombre B est solution de la même équation que le nombre A .
 - > Justifier que : $0 < B < \frac{\pi}{2}$
 - > > > > Conclure.
- Application : Simplifier puis calculer la limite quand $n \rightarrow \infty$ de : $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 3. [Correction] On considère la fonction $h : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

- Justifier que la fonction h est définie $\mathcal{D} = [-1; 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1; 1[$.

Dans la correction je justifie qu'en fait $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]0, 1[$

- Calculer et finaliser $h'(x)$.

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathcal{D}', \quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{x}{|x|} \right]$$

- En discutant selon x , déterminer une expression simplifiée de $h(x)$

———— Révision Trigo ————

Exercice 4. Soit $n \geq 2$.

On considère, pour $n \geq 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

- Calculer g_{n+1} en fonction de g_n
- En déduire que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
- On admet que $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Vérifier que : $(2 + \sqrt{3})^0$, $(2 + \sqrt{3})^1$, $(2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^4$ sont des mélanges de (1) et de $(\sqrt{3})$ avec des pondérations dans $\mathbb{Z}$

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 = 1.(1) + 0.(\sqrt{3})$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2.(1) + 1.(\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &= 2^2 + 2.2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= [4 + 3].(1) + [4].(\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^4 &= \text{Binôme} \\ &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (\sqrt{3})^k (2)^{4-k} \\ &= 1.2^4 + 4(\sqrt{3})^1.(2)^3 + 6(\sqrt{3})^2.(2)^2 + 4(\sqrt{3})^3.(2)^1 + (\sqrt{3})^4 \\ &= [2^4 + 6.3.2^2 + 9] (1) + [4.2^3 + 4.3.2] (\sqrt{3})\end{aligned}$$

2. Montrer par récurrence qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.

On démontre par récurrence

$$H\langle n \rangle : \left| \text{Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \right.$$

Initialisation

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 \text{ je choisis } a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } (2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3})$$

On utilise $H\langle n \rangle$

$$\begin{aligned}&= (a_n + b_n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3}[a_n + 2b_n]\end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers!!!

$$\text{De plus } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ et } b_1 = 1$$

Remarque : Maintenant j'ai une relation entre le rang $(n+1)$, CàD a_{n+1} et b_{n+1} et le rang (n) , a_n et b_n
Donc faire des récurrences n'est pas une mauvaise idée

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

L'objectif est de se débarrasser de b_n , b_{n+1} , ...

$$\text{On sait que : } a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$\text{On ré-organise la première, ainsi } b_n = \frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$$

$$\text{ET } b_{n+1} = \frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1}$$

La deuxième $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient

$$\left[\frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} \right] = a_n + 2 \left[\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n \right]$$

Conclusion : On ré-organise, ainsi $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

En déduire a_n en fonction de n .

- > La suite (a_n) est une suite classique d'ordre 2.
- > Équation caractéristique.

On résout $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Comme $\Delta = \dots = 1492 > 0$,

Ainsi l'équation admet 2 racines $\neq$ dans $\mathbb{R}$: $r = 2 + \sqrt{3}$ et $r' = 2 - \sqrt{3}$.

> On sait d'après la théorie des suites,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda(r)^n + \mu(r')^n = \lambda(2 + \sqrt{3})^n + \mu(2 - \sqrt{3})^n \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

> De plus

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow \lambda(2 + \sqrt{3}) + \mu(2 - \sqrt{3}) = 2 \end{array} \right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n$$

4. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.

Initialisation avec $n=0$

On sait que : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

On a bien $(a_0)^2 - 3(b_0)^2 = 1$. Donc $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité Je suppose $H_{<n>}$.

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $(a_{n+1})^2 - 3(b_{n+1})^2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } (a_{n+1})^2 - 3(b_{n+1})^2 &= (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 \\ &= (4a_n^2 + 12a_nb_n + 9b_n^2) - 3(a_n^2 + 4a_nb_n + 4b_n^2) \\ &= a_n^2 - 3b_n^2 \\ &= 1 \quad \text{D'après } H_{<n>} \end{aligned}$$

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

$$\text{On a : } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

Or a_n, b_n sont > 0

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3(b_n)^2}$$

$$\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$$

$$\text{Donc } 3(b_n)^2 = (a_n)^2 - 1$$

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}$$

Je choisis $N_0 = (a_n)^2$. C'est un entier qui convient

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.

On étudie, sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h: x \mapsto f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

Attention le domaine d'étude c'est $\mathbb{R}_+$, ce n'est pas $\mathbb{N}$

> Rappel : On sait que : $\arctan(\square)$ se calcule toujours

Le nombre $h(x)$ se calcule Ssi $1+x+x^2 \neq 0$.

comme $x \in \mathbb{R}_+$, on a $1+x+x^2 \geq 1+0+0 \neq 0$

Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$

De plus elle est fabriquée avec les fonctions usuelles et opérations classiques

Conclusion : La fonction est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} > \forall x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) \right] \\ &= [1+x]' \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+(x)^2} - \left[\frac{1}{1+x+x^2} \right]' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - (1+2x) \frac{-1}{(1+x+x^2)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée est fait

On finalise le calcul

C'est un peu lourd

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2+2x+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{-1-2x}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\ &\text{Or on remarque que : } (2+2x+x^2)(1+x^2) = \dots \\ &\text{et } 1+(1+x+x^2)^2 = \dots \end{aligned}$$

Donc c'est égal !!!!!

$$= 0$$

> D'où le tableau

x	0	∞
$g'(x)$	0	
$g(x)$	$\longrightarrow$	

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = \dots = 0$ donc la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

2. Méthode 2.

Le nombre A est solution d'une équation ; laquelle ?

On sait que $\arctan(\alpha)$ est une solution de l'équation $\tan(X) = \alpha$

$$\text{Ainsi : } \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)\right) = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

$$\text{Conclusion : } A \text{ est solution de l'équation : } \tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

Donner la formule de $\tan(a-b)$.

$$\text{On sait/on retrouve que : } \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

En déduire que le nombre B est solution de la même équation que le nombre A .

on a $\tan(B) = \tan(a-b)$ avec $\alpha = \arctan(p+1)$ et $\beta = \arctan(p)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \\ &= \frac{(p+1) - p}{1 - (p+1)p} = \frac{1}{1+p+p^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } B \text{ est solution de l'équation : } \tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

Justifier que : $0 < B < \frac{\pi}{2}$

On sait que $\arctan$ est croissante et $0 \leq p < (p+1) < \infty$

$$\text{donc } \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \leq \arctan(p) < \arctan(p+1) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } 0 \leq \underbrace{\arctan(p+1) - \arctan(p)}_{=B} < \frac{\pi}{2}$$

Conclure

Comme $A = \arctan(\square)$, on a $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $\tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$ admet une unique solution.

$$\text{Conclusion } A = B$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Justifier que la fonction h est définie $\mathcal{D} = [-1; 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1; 1[$.

Rappel : On sait que : $\arcsin(\square)$ se calcule Ssi $-1 \leq \square \leq 1$

$$\text{Le nombre } h(x) \text{ se calcule Ssi } \begin{cases} -1 \leq x \leq +1 \\ -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq +1 \iff -1 \leq x \leq +1 \\ 1-x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq +1 \end{cases}$$

De plus elle est fabriquée avec les fonctions usuelles et opérations classiques

Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = [-1; 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1; 1[$

Complément

L'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'$ a été trouvé avec l'argument sauf aux bornes

et l'argument et le résultat est faux

En effet dans le calcul (à suivre) de $h'(x)$, il y a du $\frac{1}{|x|}$ et on ne divise pas par 0!!!!

Pour calculer l'ensemble $\mathcal{D}'$, il faudrait faire

$$\text{On peut calculer le nombre } h'(x) \text{ Ssi } \begin{cases} x \in \mathcal{D} = [-1, 1] & \# \text{ Ainsi } h(x) \text{ se calcule} \\ \sqrt{1-x^2} \neq \pm 1 & \# \text{ Ainsi } \arcsin(\square) \text{ évite les pb de dérivabilité de } \arcsin \\ 1-x^2 \neq 0 & \# \text{ Ainsi } \sqrt{\square} \text{ évite les pb de dérivabilité de } \sqrt{} \end{cases}$$

Conclusion : la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]0, 1[$.

2. Calculer et finaliser $h'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) &= \frac{d}{dx} [\arcsin(x)] + \frac{d}{dx} [\arcsin \sqrt{1-x^2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left[\sqrt{1-x^2} \right]' \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-2x) \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée est fait

On finalise le calcul

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

Rappel : $\sqrt{\square^2} = |\square|$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{x}{|x|} \right]$$

3. En discutant selon x , déterminer une expression simplifiée de $h(x)$

On discute selon le signe de x .

> Si/Lorsque $x \in \mathcal{D}'$ et $x > 0$, on a $|x| = +x$, $\frac{x}{|x|} = 1$ et $h'(x) = 0$

On primitive ainsi $\forall x \in]0; 1[$, on a $h(x) = \mathcal{O} + K_{\text{constante}}$

On calcule K avec $h(0) = K = \arcsin(0) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

> Si/Lorsque $x \in \mathcal{D}'$ et $x < 0$, on a $|x| = -x$, $\frac{x}{|x|} = -1$ et $h'(x) = 2\arcsin'(x)$

On primitive ainsi $\forall x \in]-1; 0[$, on a $h(x) = 2\arcsin(x) + \text{Constante}$

On calcule C avec $h(0) = 2\arcsin(0) + C = \frac{\pi}{2}$.