

(In)-Équations

1 Trouver ..., Déterminer ..., Montrer il existe ...	1	4.2 Résoudre par ré-organisation	3
2 Ré-organiser une information	2	4.3 Bijection monotone.	4
3 Résoudre une inéquation.	2	4.4 Les équations trigo.	4
4 Équation.	3	5 Les racines n-ième de l'unité.	5
4.1 Vocabulaire, méthode et Kulture	3	5.1 Le nombre complexe j	5
		5.2 Racines n-ième de 1.	6
		5.3 Factorisation des polynômes.	8
		6 Système d'équations.	9

1 Trouver ..., Déterminer ..., Montrer il existe ...

Le patron cherche un candidat pour un JOB

après avoir auditionner les postulant, il finit par **choisir** quelqu'un qui fait le JOB

Exercice 1.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k-1}$

En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$

2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq 1, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x-1}$

En déduire une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$ sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$

Exercice 2. [Correction]

1. Vérifier que : $(2 + \sqrt{3})^0, (2 + \sqrt{3})^1, (2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^4$

sont des mélanges de (1) et de $(\sqrt{3})$ avec des pondérations dans $\mathbb{Z}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer **par récurrence** qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$.

De plus on exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

En déduire a_n en fonction de n .

4. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

2 Ré-organiser une information

> On ré-organise une égalité, c'est $\iff$ ou $\implies$

$$A = B + C \iff A - B = C$$

$$\frac{A}{B} = C \iff A = B \cdot C$$

$$\text{MAIS attention } A = \sqrt{B} \implies A^2 = B$$

$$A = 2 \implies f(A) = f(2) \quad \text{avec } f \text{ une fonction}$$

> On ré-organise une inégalité, c'est $\iff$ et souvent RIEN

$$A \leq B + C \iff A - B \leq C$$

$$A \leq B \iff \ln(A) \leq \ln(B) \quad \text{car } \ln \text{ est strict croissante}$$

$$A \leq B \iff e^A \leq e^B \quad \text{car } \exp \text{ est strict croissante}$$

$$\text{MAIS } \frac{A}{B} \leq C \not\Rightarrow A \leq B \cdot C \quad \text{problème de signe de } B.$$

$$A \leq \sqrt{B} \not\Rightarrow A^2 \leq B \quad \text{problème de signe de } A.$$

$$A \leq B \not\Rightarrow A^2 \leq B^2 \quad \text{La fonction } x^2 \text{ n'est pas croissante.}$$

$$A \leq 2 \not\Rightarrow f(A) \leq f(2) \quad \text{une fonction n'est pas forcément croissante}$$

3 Résoudre une inéquation.

Pour résoudre une inéquation, on ré-organise et on finalise avec un Bô tableau de signe

$$\text{CàD } A \leq B \iff 0 \leq B - A$$

$\iff$ On finalise avec FFF

Exercice 3. [\[Correction\]](#) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les Inéquation suivantes (d'inconnue x et R) :

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geq 3 \quad \frac{2+1/x}{3+2/x} \geq 3 \quad \frac{3x}{10} \geq \frac{5}{6x}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{R} \quad x^{n+1} \geq 2x^n \quad \ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geq 0$$

Exercice 4.

1. Étudier les variation de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

2. Étudier les variation de $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier les variation de $f : x \mapsto (1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$

4. Étudier les variation de $f : x \mapsto x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$

4 Équation.

4.1 Vocabulaire, méthode et Kulture

Définition 1. Résoudre Vs Trouver/Déterminer/Il existe

> Résoudre une équation (sur $\mathcal{D}$) signifie :

Trouver toutes les solutions de l'équation dans le domaine D .

> Trouver/déterminer/Montrer qu'il existe a, b tel que signifie :

Trouver un couple a, b qui convient

sans chercher à vérifier/justifier que ce couple est le seul, unique.

Les équations classiques. Soit a un paramètre dans $\mathbb{R}$.

$$> x^2 = a \iff \begin{cases} \text{Lorsque } a > 0, & x = +\sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \\ \text{Lorsque } a = 0, & x = 0 \\ \text{Lorsque } a < 0, & x = +i\sqrt{|a|} \text{ ou } x = -i\sqrt{|a|} \end{cases}$$

> $ax^2 + bx + c = 0$ il y a une discussion selon la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$> \ln(x) = a \iff x = e^a$$

$$> e^x = a \iff \begin{cases} \text{Si } a > 0, & x = \ln(a) \\ \text{Si } a \leq 0, & \text{Pas de solution} \end{cases}$$

$$> \text{Trigo : } \tan(x) = a, \sin(x) = a, \cos(x) = a$$

Théorème 2. Résoudre

> Pour résoudre une équation, il y a deux "stratégies"

- Soit on ré-organise et on se ramène à une équation classique

Attention : il y a une subtilité si on réorganise avec $\implies$

- Soit on utilise un théorème qui résout,
par exemple : Le théorème de la bijection monotone, le théorème de d'Alembert-Gauss, les théorèmes sur les équations diff, ...

4.2 Résoudre par ré-organisation

- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{2x+3}{5x+7} = 11$.

$$\text{On a : } \frac{2x+3}{5x+7} = 11 \iff 2x+3 = 11(5x+7) \iff x[2-55] = 77-3 \iff x = \frac{74}{-53}$$

Conclusion l'équation admet l'unique solution $x = -74/53$

- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{x+2} = x$.

$$\text{On a } \sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Comme } \Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2, \text{ il y a 2 sol } \neq \text{ dans } \mathbb{R}, r = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ et } r' = \frac{1+3}{2} = 2.$$

MAIS à cause du $\implies$, on doit vérifier que ça convient :

$$\text{Comme } \sqrt{r+2} = \sqrt{(-1)+2} = 1 \neq -1 = r \text{ et } \sqrt{r'+2} = \sqrt{2+2} = 2 = r',$$

Conclusion l'équation admet l'unique solution $x = 2$

Exercice 5. Soit a et b non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes (d'inconnue x et R) :

$$\frac{3x+1}{2x-3} = 3$$

$$\frac{2+1/x}{3+2/x} = 3$$

$$\frac{3x}{10} = \frac{5}{6x}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{R}$$

$$x^{n+1} = 2x^n$$

$$\ln(x^2) - \ln(x) - 6 = 0$$

Exercice 6. [Correction] Soit a et b non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (d'inconnue x et R) :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

$$x^9 + 2x^5 - x = 0$$

$$e^x - 1 - 2e^{-x} = 0$$

$$\sqrt{2-\ell} = \ell$$

4.3 Bijection monotone.

Théorème 3. Résolution via une fonction

Pour résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$

> On étudie la fonction $h : x \mapsto h(x) - x$.

> Avec le tableau de variation et théorème de la bijection monotone, on conclut sur le nombre de solution.

Exemple. Montrer que : $\sin(\ell) = \ell \iff \ell = 0$.

Il n'est pas possible de résoudre l'équation par ré-organisation

Donc on va le faire "graphiquement" mais ça va être long.

> On étudie la fonction $h : x \mapsto \sin(x) - x$

L'étude (pas dur mais longue) permet de conclure que : la fonction h est strictement décroissante.

> La fonction est continue et strictement décroissante

Ainsi h réalise une bijection (décroissante) de $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ sur $\text{Im} = \mathbb{R}$ (théorème de la bijection monotone.)

Comme $0 \in \text{Im}$, on sait que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution que je note ℓ .

> De plus, il est évident que $h(0) = 0$. Comme ℓ est l'unique solution, on a forcément $\ell = 0$.

Conclusion : $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $\sin(X) = X$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en discutant, si besoin, suivant le paramètre

$$\ln(1+\ell) = \frac{1}{2}\ell$$

$$e^x = x$$

$$x \ln(x) = m$$

4.4 Les équations trigo.

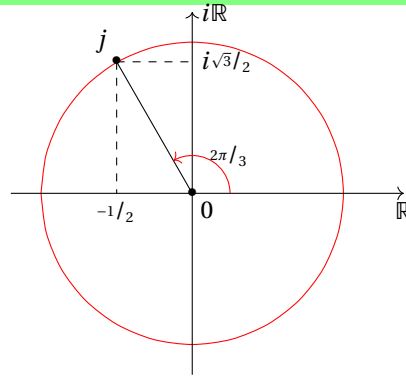
5 Les racines n-ième de l'unité.

5.1 Le nombre complexe j .

Définition 4.

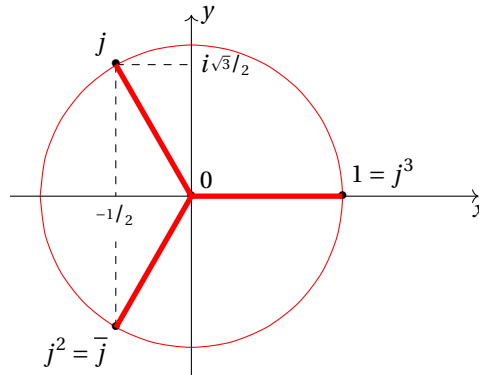
Le complexe j est le complexe définie par

$$j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3}$$



Théorème 5. Propriétés du complexe j .

- > Le complexe j est une solution de l'équation $X^3 = 1$
Ainsi j est une racine cubique de l'unité
- > L'équation $X^3 = 1$ admet, dans $\mathbb{C}$, exactement 3 solutions sont : $1, j, j^2$.
Ce sont les 3 racines cubiques de l'unité.
- > Les 3 racines cubiques de l'unité s'exprime en fonction de j ,
On dit que j est la racine 3-ième fondamentale de l'unité.



Et on a le formulaire

$$j^3 = 1 \quad \text{et} \quad j^4 = j \quad \text{et} \quad j^5 = j^2 \quad \text{etc ...}$$

$$|j| = 1 \quad \text{et} \quad j^2 = \bar{j}$$

$$1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 8. Calcul avec le complexe j .

1. Calculer

$$(1+j)^7; (1+j)(1+j^2); \frac{j^9}{j+j^2}; (1-j+j^2)^4$$

2. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & -1-j & 1 \\ j^2 & 1 & -1-j^2 \end{pmatrix}$.
Calculer A^3 .

5.2 Racines n-ième de 1.

Théorème 6. Les racines n-ième de l'unité.

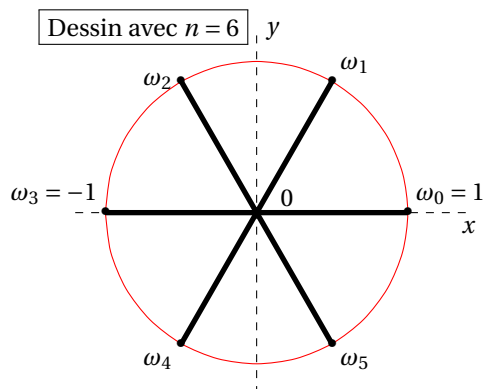
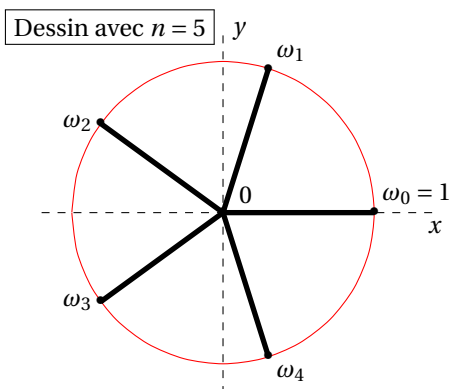
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'équation

Alors l'équation $X^n = 1$ a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, notées $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, et on a

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}, \quad \omega_k = \exp\left(ik \frac{2\pi}{n}\right)$$

Géométriquement : Les racines $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ découpent le cercle unité (ou gâteau) en exactement n parts égales, CàD on a le dessin



Vocabulaire-Notation :

- Les complexes $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont appelés les racines n-ième de l'unité.
- ω_1 est appelé la racine n-ième fondamentale.
- L'ensemble des racines n-ième est noté $\mathbb{U}_n$.

Démonstration : On va faire une démonstration qui utilise le théorème de d'Alembert-Gauss.

On a

> Les complexes ω_k vérifient l'équation $X^n = 1$. En effet

$$(\omega_k)^n = \left(e^{ik \frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{(ik \frac{2\pi}{n})n} = e^{ik2\pi} = e^{i \text{Multiple de } 2\pi} = 1$$

> Les complexes ω_k sont 2 à 2 $\neq$ pour $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$. (Il suffit de regarder le dessin.)

> L'équation $X^n = 1$ est de degré n

Donc à cause du théorème du d'Alembert Gauss, on sait qu'on a toutes les racines. Fini.

Théorème 7. Propriétés des racines n-ième.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$.

On considère $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines n-ième de l'unité.

On a alors

> Les racines n-ième de l'unité découpe le cercle unité (ou gâteau) en n parts égales.

> $\omega_0 = 1$ et $(\omega_k)^n = 1$ car c'est une racine n-ième.

> $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ donc ω_k appartient au cercle unité, CàD $|\omega_k| = 1$.

> La somme des racine n-ième est nulle, CàD

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = 0$$

> ω_k se calcule en fonction de ω_1 . En effet $\omega_k = e^{ik2\pi/n} = (e^{i2\pi/n})^k = (\omega_1)^k$

On dit que ω_1 est la racine n-ième fondamentale.

> Le conjugué de ω_k c'est ω_{n-k} , CàD $\overline{(\omega_k)} = \omega_{n-k}$

Démonstration : Les propriétés 1-2-3 sont évidentes. La propriété 4 est démontrée dans le théorème.

Somme? On a

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} &= 1 + \omega_1 + (\omega_1)^2 + \dots + (\omega_1)^{n-1} \\ &= \frac{1 - (\omega_1)^n}{1 - (\omega_1)} = \frac{1 - 1}{1 - (\omega_1)} = 0 \end{aligned}$$

Conjugué? C'est évident sur le dessin et on a le calcul

$$\omega_{n-k} = e^{i(n-k)2\pi/n} = \dots = \overline{(\omega_k)}$$

Exercice 9. On soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de l'unité

Montrer que ω^2 et $\bar{\omega}$ sont aussi des racines n-ième de l'unité.

Exercice 10. [Correction] Soit a, b, c des complexes. Montrer que :

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \iff a + bj + cj^2 = 0$$

Exercice 11. Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{5}\right]$

On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Placer $\omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 sur le cercle trigo.
2. D'une part. Montrer que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. D'autre part.

Calculer $A + B$ et $A.B$.

En déduire la valeur de A et de B .

4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 12. Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{7}\right]$

On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $A + B$ et vérifier que $AB = 2$.
2. En déduire A et B

Théorème 8. Racines n-ième de a .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Les solution de l'équation $X^n = a = re^{i\theta}$ sont le produit

> D'une solution particulière $r_0 = \sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$.

> Et des racines n-ième de l'unité, CàD $\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$,

$$\text{Conclusion : on a : } X^n = a \iff X = r_k = r_0 \cdot \omega_k \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$$

Démonstration : On vérifie facilement que $(r_0)^n = \left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\theta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot \left(e^{i\theta/n}\right)^n = re^{i\theta} = a$

$$\text{Puis on résout } X^n = a \iff X^n = r_0^n \iff \left(\frac{X}{r_0}\right)^n = 1 \iff \begin{cases} U^n = 1 \\ X/r_0 = U \end{cases}$$

Exercice 13. Pour les équations suivantes

$$(z-1)^3 = 8, \quad z^4 = 1 + i \quad (z+1)^n = 1 \quad (z+i)^n = (z-i)^n$$

1. Combien l'équation a-t-elle de solution ?
2. Déterminer les solutions.
3. Placer les solutions sur un Bô dessin (en expliquant le Bô dessin).

Exercice 14. [Correction] Calcul de $\tan \frac{\pi}{5}$, $\tan \frac{2\pi}{5}$.

On considère l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ (E)

1. D'une part
 - (a) Combien l'équation (E) a-t-elle de solution ?
 - (b) Résoudre l'équation développée.
2. D'autre part.
 - (a) Résoudre, à l'aide des racines cinquièmes de l'unité, l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ dans $\mathbb{C}$.
 - (b) Exprimer les racines à l'aide des fonctions usuelles.
3. En déduire la valeur des nombres $\tan \frac{\pi}{5}$, $\tan \frac{2\pi}{5}$ sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ où p, q et n sont des éléments de $\mathbb{N}$.

5.3 Factorisation des polynômes.

Théorème 9.

Factorisation de $X^3 - 1$.

Le polynôme $X^3 - 1$ est de degré 3 donc il admet 3 racines dans $\mathbb{C}$.

De plus $X^3 - 1 = 0 \iff X^3 = 1 \iff X = 1, j, j^2$,

Conclusion : on a la factorisation $X^3 - 1 = 1(X-1)(X-j)(X-j^2)$

Factorisation de $X^n - 1$.

Le polynôme $X^n - 1$ est de degré n donc il admet n racines dans $\mathbb{C}$.

De plus $X^n - 1 = 0 \iff X^n = 1 \iff X = \underbrace{\omega_0}_{=1}, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$

Conclusion : on a la factorisation $X^n - 1 = 1(X-1)(X-\omega_1) \cdots (X-\omega_{n-1})$

Factorisation de $X^n - a$.

Le polynôme $X^n - a$ est de degré n donc il admet n racines dans $\mathbb{C}$.

De plus $X^n - a = 0 \iff X^n = a \iff X = X_0, X_0\omega_1, \dots, X_0\omega_{n-1}$

Conclusion : on a la factorisation $X^n - 1 = 1(X-X_0)(X-X_0\omega_1) \cdots (X-X_0\omega_{n-1})$

Exercice 15. Soit a, b des complexes.

Montrer que : $a^3 + b^3 = (a+b)(a+bj)(a+bj^2)$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $(X+1)^n = 1$ et simplifier l'expression des racines.
2. Factoriser le polynôme $P(X) = (X+1)^n - 1$.
3. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

6 Système d'équations.

Exemples de système de n équations à n inconnues. ici $n = 3$

$$\underbrace{\begin{cases} 2a - 3b + 4c = 2 \\ a + 8b + 5c = 8 \\ -a + 2b + c = -5 \end{cases}}_{\text{Système complet}} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 2a - 3b + 4c = 0 \\ a + 8b + 5c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - 3z = 4 \\ -x + 4z = -1 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 3z = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{cases}$$

Exemples de système de n équations à p inconnues avec $n \neq p$

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 5y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x + 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - z + t = -9 \end{cases} \text{ et le système homogène associé } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - z + t = 0 \end{cases}$$

Un système avec une seule équation est un système

$$\{2x - 3y = 5 \quad \quad \quad \{2x - 3y + 5z = 7$$

Définition 10.

> On notera le vocabulaire : "Système complet" et "système homogène associé"

> On dit qu'un système est triangulaire

Ssi chaque équation est strictement plus "courte" que la précédente.

Par exemple les systèmes suivants sont triangulaires

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \text{ ou } (S_2) \begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ y + z + 2t = 0 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Théorème 11. Résolution pratique des systèmes.

> Étape 1 : Avec des opérations de Gauss, on trigonalise le système.

> Étape 2 : On discute (si besoin)

> On finalise en donnant le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ des inconnues.

Exercice 17. [\[Correction\]](#) Résoudre les systèmes suivants en discutant, si besoin, suivant le paramètre

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 4x + 8y = m \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = m \end{cases}$$

Exercice 18. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

Exercice 19. [\[Correction\]](#)

1. Résoudre le système $\{x + y = 2$ d'inconnue x, y et interpréter géométriquement
2. Résoudre les systèmes d'inconnue x, y, z et interpréter géométriquement

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2 \\ x + 4y - z = 3 \end{cases} \quad \{x + y = 2$$

Exercice 20. [\[Correction\]](#) En calculant ses coefficients, déterminer des polynômes P de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(1) = 2, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 2$$

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Vérifier que : $(2 + \sqrt{3})^0$, $(2 + \sqrt{3})^1$, $(2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^4$ sont des mélanges de (1) et de $(\sqrt{3})$ avec des pondérations dans $\mathbb{Z}$

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 = 1.(1) + 0.(\sqrt{3})$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2.(1) + 1.(\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^2 &= 2^2 + 2.2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= [4 + 3].(1) + [4].(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$(2 + \sqrt{3})^4 = \text{Binôme}$$

$$= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (\sqrt{3})^k . (2)^{4-k}$$

$$= 1.2^4 + 4(\sqrt{3})^1 . (2)^3 + 6(\sqrt{3})^2 . (2)^2 + 4(\sqrt{3})^3 . (2)^1 + (\sqrt{3})^4$$

$$= [2^4 + 6.3.2^2 + 9] (1) + [4.2^3 + 4.3.2] (\sqrt{3})$$

2. Montrer par récurrence qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$.

On démontre par récurrence

$$H\langle n \rangle : \left| \text{Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \right.$$

Initialisation

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 \text{ je choisis } a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } (2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

$$\text{On a } (2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3})$$

On utilise $H\langle n \rangle$

$$= (a_n + b_n \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3}[a_n + 2b_n]$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers !!!

$$\text{De plus } (2 + \sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ et } b_1 = 1$$

Remarque : Maintenant j'ai une relation entre le rang $(n+1)$, CàD a_{n+1} et b_{n+1} et le rang (n) , a_n et b_n
Donc faire des récurrences n'est pas une mauvaise idée

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

L'objectif est de se débarrasser de $b_n, b_{n+1}, \dots$

$$\text{On sait que : } a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$\text{On ré-organise la première, ainsi } b_n = \frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$$

$$\text{ET } b_{n+1} = \frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1}$$

La deuxième $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient

$$\left[\frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} \right] = a_n + 2 \left[\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n \right]$$

Conclusion : On ré-organise, ainsi $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

En déduire a_n en fonction de n .

- > La suite (a_n) est une suite classique d'ordre 2.
- > Équation caractéristique.

On résout $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Comme $\Delta = \dots = 1492 > 0$,

Ainsi l'équation admet 2 racines $\neq$ dans $\mathbb{R}$: $r = 2 + \sqrt{3}$ et $r' = 2 - \sqrt{3}$.

> On sait d'après la théorie des suites,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda(r)^n + \mu(r')^n = \lambda(2 + \sqrt{3})^n + \mu(2 - \sqrt{3})^n \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

> De plus

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow \lambda(2 + \sqrt{3}) + \mu(2 - \sqrt{3}) = 2 \end{array} \right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n$$

4. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.

Initialisation avec $n=0$

On sait que : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

On a bien $(a_0)^2 - 3(b_0)^2 = 1$. Donc $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité Je suppose $H_{<n>}$.

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $(a_{n+1})^2 - 3(b_{n+1})^2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } (a_{n+1})^2 - 3(b_{n+1})^2 &= (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 \\ &= (4a_n^2 + 12a_nb_n + 9b_n^2) - 3(a_n^2 + 4a_nb_n + 4b_n^2) \\ &= a_n^2 - 3b_n^2 \\ &= 1 \quad \text{D'après } H_{<n>} \end{aligned}$$

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

$$\text{On a : } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

Or a_n, b_n sont > 0

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3(b_n)^2}$$

$$\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$$

$$\text{Donc } 3(b_n)^2 = (a_n)^2 - 1$$

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}$$

Je choisis $N_0 = (a_n)^2$. C'est un entier qui convient

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Pour les inéquations, on finit avec un tableau de signe!!!!!!

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geq 3 \iff \frac{3x+1}{2x-3} - 3 \geq 0 \iff \frac{-3x+10}{2x-3} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{2+1/x}{3+2/x} \geq 3 \iff \frac{2+1/x}{3+2/x} - 3 \geq 0 \iff \frac{-7x-5}{3x+2} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{3x}{10} \geq \frac{5}{6x} \iff \frac{3x}{10} - \frac{5}{6x} \geq 0 \iff \frac{18x^2 - 50}{60x} \geq 0 \iff \frac{18(x-r)(x-r')}{60x} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$x^{n+1} + x^n \geq 0 \iff x^n(x+1) \geq 0 \quad \text{discussion} \left\{ \begin{array}{l} \text{Lorsque } n \text{ est pair : on sait que } x^{\text{pair}} \text{ est tjs } \geq 0, \text{ ainsi } \dots \\ \text{Lorsque } n \text{ est impair : on sait que } x^{\text{impair}} \geq 0 \iff x \geq 0, \\ \text{On finit avec un tableau de signe} \end{array} \right.$$

$$\ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geq 0 \iff 2\ln(x) - \ln(x) - 6 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 6 \iff x \geq e^6$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) Pour les inéquations, on finit avec un tableau de signe!!!!!!

$$\frac{3x+1}{2x-3} \geq 3 \iff \frac{3x+1}{2x-3} - 3 \geq 0 \iff \frac{-3x+10}{2x-3} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{2+1/x}{3+2/x} \geq 3 \iff \frac{2+1/x}{3+2/x} - 3 \geq 0 \iff \frac{-7x-5}{3x+2} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$\frac{3x}{10} \geq \frac{5}{6x} \iff \frac{3x}{10} - \frac{5}{6x} \geq 0 \iff \frac{18x^2-50}{60x} \geq 0 \iff \frac{18(x-r)(x-r')}{60x} \geq 0 \quad \text{On finit avec un tableau de signe}$$

$$x^{n+1} + x^n \geq 0 \iff x^n(x+1) \geq 0 \quad \text{discussion} \left\{ \begin{array}{l} \text{Lorsque } n \text{ est pair : on sait que } x^{\text{pair}} \text{ est tjs } \geq 0, \text{ ainsi...} \\ \text{Lorsque } n \text{ est impair : on sait que } x^{\text{impair}} \geq 0 \iff x \geq 0, \\ \text{On finit avec un tableau de signe} \end{array} \right.$$

$$\ln(x^2) - \ln(x) - 6 \geq 0 \iff 2\ln(x) - \ln(x) - 6 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 6 \iff x \geq e^6$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) Avec un cercle trigo, on a $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, ainsi on a

$$\begin{aligned} c - a &= e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \iff c - a = -j^2(b - a) \\ &\iff (j^2 + 1)a - j^2b - c = 0 \\ &\iff -ja - j^2b - c = 0 \\ &\iff (-j)[a + bj + cj^2] = 0 \\ &\iff a + bj + cj^2 = 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) Calcul de $\tan \frac{\pi}{5}$, $\tan \frac{2\pi}{5}$.

On considère l'équation

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (E)$$

1. D'une part

(a) Combien y a-t-il de solution d'une équation polynômiale ?

$$\text{On a } (E) \Leftrightarrow (1 + iz)^5 - (1 - iz)^5 = 0$$

On a

Tout d'abord

$$(1 + iz)^5 = iz^5 + 5iz^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1$$

$$(1 - iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$

$\Rightarrow$ Ainsi

$$(E) \iff (1 + iz)^5 - (1 - iz)^5 = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff (iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1) \\ &\quad - (-iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 2$$

$$\iff 2iz(z^4 - 10z^2 + 5) = 0$$

Donc l'équation est polynômiale de degré 5, il y a 5 racines dans $\mathbb{C}$.

(b) On résout l'équation dans $\mathbb{C}$

$$(E) \iff 2iz(z^4 - 10z^2 + 5) = 0 = 0$$

$$\iff [z = 0] \text{ ou } [z^4 - 10z^2 + 5 = 0]$$

$\Rightarrow$ On résout (B)

$$z^4 - 10z^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U^2 - 10U + 5 = 0 \\ \text{et } z^2 = U \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

Conclusion : Il y a 5 racines $0, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{2\sqrt{5}+5}, -\sqrt{2\sqrt{5}+5}$

2. D'autre part.

Fait en classe : On trouve 5 racines : $0, \tan \frac{\pi}{5}, \tan \frac{2\pi}{5}, \tan \frac{3\pi}{5}, \tan \frac{4\pi}{5}$

3. Il faut identifier **Mais qui est qui !!!!**

On sait que

$$-\sqrt{2\sqrt{5}+5} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{2\sqrt{5}+5},$$

Avec le graphe de tangente, on a

$$\tan \frac{3\pi}{5} < \tan \frac{4\pi}{5} < 0 < \tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{2\pi}{5}$$

On a donc $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

On discute selon les valeurs du paramètre m les solutions du système (S) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = m \end{cases}$

On commence par trigonaliser le système

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = m \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 0x - \frac{5}{2}y = -5 \\ 0x + \frac{11}{2}y = m + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 0x - \frac{5}{2}y = -5 \\ 0x + 0y = m - 1 \end{cases}$$

Lorsque $m \neq 1$

Alors le système (S) n'a pas de solution.

Lorsque $m = 1$

Alors le système (S) a une unique solution $(x, y) = (1, 2)$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

> On trigonalise

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 0x + y + 6z = 7 \\ 0x + 3y + 18z = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 0x + y + 6z = 7 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \end{cases}$$

Les solutions de $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

> On trigonalise

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ 0x - 2y = 2 \\ y + t = -1 \\ 0x - y - t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ y = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Les solutions de $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

On cherche P un polynôme de degré 2

donc on cherche $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(2) = 1 \\ P(3) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

On résout le système et on trouve $a = 1$, $b = -4$ et $c = 5$, ainsi $P(X) = X^2 - 4X + 5$

Autre solution.

Comme $P(1) = P(3) = 2$, alors 1 et 3 sont racines de $P(X) - 2$ et on a $P(X) - 2 = a(X - 1)(X - 3)$

De plus $P(2) = 1$ ainsi $P(2) - 2 = a(2 - 1)(2 - 3)$ et donc $a = 1$

Conclusion : $P(X) = (X - 1)(X - 3) + 2 = X^2 - 4X + 5$