

DM 6. Arc-tangente et la formule de Machin

Note historique :

John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule qui porte son nom.

Donc "la formule de Machin" n'est pas un jeu de mot !

Exercice 1. [Correction]

1. La formule de John Machin

Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

(a) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.

En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.

(b) Montrer que : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$

(c) Justifier que $0 < \beta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Encadrer $4\alpha - \beta$.

Puis en déduire la formule de John Machin, CàD $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2. Approximation de $\arctan(a)$

Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$

(b) En déduire que : $s_n(a) = \arctan(a) + (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

(d) En déduire que : $\left| s_n(a) - \arctan(a) \right| \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

(e) La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle ?

3. Approximation de π .

Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\pi}{4} - 4 s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| \leq 4 \frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n} \leq \frac{1}{5^{n-1}}$$

Application : Calcul de 3 décimales de π ,
il n'y a rien à faire juste lire

$$\begin{aligned} > \text{Lorsque } n = 3, \text{ on a } 4 \frac{1}{(2 \cdot 3 + 3)5^3} + \frac{1}{(2 \cdot 3 + 3)239^3} = \frac{4}{9 \cdot 125} + \frac{1}{9 \cdot 13 \, 651 \, 919} \\ &= 0,0035\dots + 0,0000\dots \approx 0,0035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \left| \frac{\pi}{4} - 4s_3\left(\frac{1}{5}\right) + s_3\left(\frac{1}{239}\right) \right| &\leq 0,0035 \\ \Rightarrow \left| \pi - 16s_3\left(\frac{1}{5}\right) + 4s_3\left(\frac{1}{239}\right) \right| &\leq 4 \times 0,0035 = 0,014 \end{aligned}$$

> De plus on a

$$\begin{aligned} s_3\left(\frac{1}{5}\right) &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k \frac{1}{(2k+1)5^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{375} + \frac{1}{15 \, 625} \\ &= 0,2 - 0,0026\dots + 0,000064 + 0,00000\dots \\ &\approx 0,1974 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3\left(\frac{1}{239}\right) &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k \frac{1}{(2k+1)239^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} \\ &\approx 0,0042 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{On a } 16s_3\left(\frac{1}{5}\right) - 4s_3\left(\frac{1}{239}\right) &= 16 \times 0,1974 - 4 \times 0,0042 \\ &= 3,1584 - 0,0168 \\ &= 3,1416 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \left| \pi - 16s_3\left(\frac{1}{5}\right) + 4s_3\left(\frac{1}{239}\right) \right| = \left| \pi - 3,1416 \right| \leq 0,014$$

Avec une meilleur analyse/contrôle de l'erreur, on montre que $\left| \pi - 3,1416 \right| \leq 0,001$
on a donc 3 décimales justes,

CàD $\pi \approx 3,141\dots$

Exercice 2. [Correction] BONUS La formule de John Machin (deuxième démonstration)

On considère le complexe $A = \frac{(5+i)^4}{239+i}$

1. D'une part. Vérifier que $A = 2 + 2i$. Mettre A sous forme algébrique puis circulaire.
2. D'autre part.

Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$

Soit $x > 0$. Montrer que : $x + i = \sqrt{x^2 + 1} e^{i \arctan(1/x)}$.

En déduire une nouvelle forme circulaire du complexe A

3. En déduire que : $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

attention rigueur : $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \nRightarrow \alpha = \beta$. Mais $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta \pmod{[2\pi]}$