DM 6. Arc-tangente et la formule de Machin

Note historique :

John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule qui porte son nom.

Donc "la formule de Machin" n'est pas un jeu de mot !

Exercice 1. [Correction]

1. La formule de John Machin

   Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

   (a) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.

   En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.

   (b) Montrer que : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$

   (c) Justifier que $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.

   Encadrer $4\alpha - \beta$.

   Puis en déduire la formule de John Machin, CàD $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2. Approximation de $\arctan(a)$

   Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

   (a) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$

   (b) En déduire que : $s_n(a) = \arctan(a) + (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$

   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

   (d) En déduire que : $\left|s_n(a) - \arctan(a)\right| \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

   (e) La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle ?

3. Approximation de π.

   Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\pi}{4} - 4\, s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| \leqslant 4\frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n} \leqslant \frac{1}{5^{n-1}}$$

Application : Calcul de 3 décimales de π,
il n'y a rien à faire juste lire

> Lorsque $n=3$, on a $4\dfrac{1}{(2\,.3+3)5^3}+\dfrac{1}{(2\,.3+3)239^3}=\dfrac{4}{9.125}+\dfrac{1}{9.13\ 651\ 919}$

$$=0,0035....+0.0000....\approx 0.0035$$

Ainsi $\left|\dfrac{\pi}{4}-4\,s_3\left(\dfrac{1}{5}\right)+s_3\left(\dfrac{1}{239}\right)\right|\leqslant 0.0035$

$$\Longrightarrow\ \left|\pi-16\,s_3\left({}^1\!/_5\right)+4s_3\left({}^1\!/_{239}\right)\right|\leqslant 4\times 0.0035=0,014$$

> De plus on a

$$\begin{aligned}s_3\left({}^1\!/_5\right)&=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\,5^{2k+1}}\\&=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}\\&=\frac{1}{5}-\frac{1}{375}+\frac{1}{15\ 625}\\&=0.2-0,0026...+0,000064+0,00000...\\&\approx 0,1974\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_3\left({}^1\!/_{239}\right)&=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\,239^{2k+1}}\\&=\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}\\&\approx 0,0042\end{aligned}$$

> On a $16\,s_3\left({}^1\!/_5\right)-4s_3\left({}^1\!/_{239}\right)=16\times 0,1974-4\times 0,0042$

$$\begin{aligned}&=3,1584-0,0168\\&=3,1416\end{aligned}$$

Conclusion : $\left|\pi-16\,s_3\left({}^1\!/_5\right)+4s_3\left({}^1\!/_{239}\right)\right|=\left|\pi-3,1416\right|\leqslant 0.014$

Avec une meilleur analyse/contrôle de l'erreur, on montre que $\left|\pi-3,1416\right|\leqslant 0.001$

on a donc 3 décimales justes,

CàD $\pi\approx 3,141...$

Exercice 2. [Correction] BONUS La formule de John Machin (deuxième démonstration)

On considère le complexe $A=\dfrac{(5+i)^4}{239+i}$

1. D'une part. Vérifier que $A=2+2i$. Mettre A sous forme algébrique puis circulaire.
2. D'autre part.
   Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$
   Soit $x>0$. Montrer que : $x+i=\sqrt{x^2+1}\;e^{i\arctan({}^1\!/_x)}$.
   En déduire une nouvelle forme circulaire du complexe A
3. En déduire que : $4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

attention rigueur : $e^{i\alpha}=e^{i\beta}\not\Rightarrow\alpha=\beta$. *Mais* $e^{i\alpha}=e^{i\beta}\iff\alpha\equiv\beta\mod[2\pi]$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. La formule de John Machin

   Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

   (a) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.

   C'est du cours. On trouve $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

   En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.

   Comme $\alpha = \arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{5})$ vérifie l'équation $\tan x = \frac{1}{5}$,

   on a $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$

   Ainsi $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2.\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{5}{12}$

   $$\tan(4\alpha) = \frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)} = \frac{2.\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

   (b) Montrer que : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$

   On a va calculer $\tan(4\alpha - \beta)$

   On sait/on retrouve $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$,

   ainsi
   $$\begin{aligned}\tan(4\alpha-\beta) &= \frac{\tan(4\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(4\alpha)\tan(\beta)}\\ &= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}}\\ &= \frac{\frac{120.239-119}{119.239}}{\frac{119.239+120}{119.239}}\\ &= \frac{120.239-119}{119.239+120} = \frac{166681}{166681} = 1\end{aligned}$$

   Conclusion : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$

   (c) Justifier que $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.

   Comme $Arctangente$ est strictement croissante, on a bien

   $$0 = \arctan(0) < \arctan(\frac{1}{239}) < \arctan(\frac{1}{5}) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

   Encadrer $4\alpha - \beta$.

   Avec ce qui précède, on a : $0 \leqslant 4\alpha - \beta \leqslant 4\dfrac{\pi}{4} - 0 = \pi$

   Puis en déduire la formule de John Machin, CàD $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

   Sur $]0,\pi[$, l'équation $\tan(X) = 1$ a une unique solution $\dfrac{\pi}{4}$

   A cause de l'unicité, $4\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$

2. Approximation de $\arctan(a)$

   Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

   $$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(a) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$

Pour tout/chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \text{Somme Géo} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

(b) En déduire que : $s_n(a) = \arctan(a) + (-1)^n \displaystyle\int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

On intègre l'égalité précédente de $t=0$ à $t=a$

Ainsi $\displaystyle\int_0^a Gauche\,dt = \int_0^a Droite\,dt$

$$\int_0^a Gauche\,dt = \cdots = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\int_0^a Droite\,dt = \cdots = \arctan(a) + (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

(c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

On va encadrer l'intégrale

> Pour $t \in [0,a]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+\mathscr{O}}$

> On intègre l'encadrement de $t=0$ à $t=a$

Ainsi $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+0}\,dt = \big[Primitive\big]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

(d) En déduire que : $\left|s_n(a) - \arctan(a)\right| \leqslant \dfrac{a^{2n+3}}{2n+3}$

On a $\left|s_n(a) - \arctan(a)\right| = \left|(-1)^n \displaystyle\int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right|$

$$= \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$
$$\leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$$

(e) La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle ?

Si/Lorsque $a \in [0,1]$ alors $\dfrac{a^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

et la suite $(s_n(a))$ converge $\arctan(a)$

3. Approximation de π.

Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\pi}{4} - 4\,s_n\left(\dfrac{1}{5}\right) + s_n\left(\dfrac{1}{239}\right)\right| \leqslant 4\dfrac{1}{(2n+3)5^n} + \dfrac{1}{(2n+3)239^n} \leqslant \dfrac{1}{5^{n-1}}$

On a

$$\left|\frac{\pi}{4} - 4\,s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| = \left|4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 4\,s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right|$$
$$= \left|4\left[\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right)\right] - \left[\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right]\right|$$
$$\leqslant 4\left|\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right)\right| \oplus \left|\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right)\right|$$
$$\leqslant 4\frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n}$$
$$\leqslant 4\frac{1}{(1)\,5^n} + \frac{1}{(1)\,5^n} = \frac{1}{5^{n-1}}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. D'une part. Vérifier que $A = \frac{1}{2}(1+i)$. Mettre sous forme algébrique puis circulaire.

On a $\dfrac{(5+i)^4}{239+i} = \dfrac{5^4 + 4\,5^3.i + 6\,5^2.i^2 + 4\,5.i^3 + i^4}{239+i}$

$= \dfrac{[625 - 150 + 1] + i[500 - 20]}{239+i}$

$= \dfrac{(476 + 480\,i)(239 - i)}{(239+i)(239-i)}$

$= \dfrac{(476.239 + 480) + i(480.239 - 476)}{239^2 + 1}$

$= \dfrac{(114\,244) + i(114\,244)}{57\,122}$

$= 2\,(1+i) = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. D'autre part.

Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$

On sait que $\tan(\arctan(a)) = a$

On a $\cos(\arctan a) = \cos(\square)$

avec $\square = \arctan a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Donc $\cos(\square) \geqslant 0$

$= \sqrt{\cos^2(\square)}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\square)}}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2(\square) + \sin^2(\square)}{\cos^2(\square)}}}$ $\qquad = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2(\square)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

Enfin $\sin(\arctan a) = \tan(\square)\cos(\square) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

Soit $x > 0$. Montrer que : $x + i = \sqrt{x^2+1}\; e^{i\arctan(1/x)}$.

On a $\sqrt{x^2+1}\; e^{i\arctan(1/x)} = \sqrt{x^2+1}\;(\cos(\square) + i\sin(\square))$

On applique les formules précédentes avec $a = \dfrac{1}{x}$

$= \sqrt{x^2+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} + i\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\right)$

$= \sqrt{x^2} + i\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

Comme $x > 0$, *on a* $\sqrt{x^2} = |x| = +x$

$= x + i$

En déduire une nouvelle forme circulaire du complexe A

On vient de justifier que $5 + i = \sqrt{5^2+1}\; e^{i\arctan(1/5)}$

$= \sqrt{26}\; e^{i\arctan(1/5)}$

$239 + i = \sqrt{239^2+1}\; e^{i\arctan(1/239)}$

$= \sqrt{57\,122}\; e^{i\arctan(1/239)}$

Conclusion : $A = \dfrac{(5+i)^4}{239+i} = \dfrac{\left(\sqrt{26}\; e^{i\arctan(1/5)}\right)^4}{\sqrt{57\,122}\; e^{i\arctan(1/239)}}$

Or on a $26^4 = 456\,976 = 8 \times 57\,122$

$= \sqrt{8}\, e^{i[4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)]}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{i[4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)]}$

3. En déduire que : $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

attention rigueur : $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \not\Rightarrow \alpha = \beta$. *Mais* $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta \mod [2\pi]$