Programme de colle de la semaine 7

du Lundi 9 Novembre au Vendredi 13 Novembre.

Questions de cours : Une ou plusieurs calculs de primitive.
Je mets ce qu'on a fait cette semaine ou avant

- > Primitive des monômes.
- > Primitive des fonctions usuelles : $\cos(x)$, $\sin(x)$, ..., $\dfrac{1}{1+x^2}$.
- > Primitives classiques : $\dfrac{\square'}{\square} \rightsquigarrow \ln|\square|$ et $\square'.\square \rightsquigarrow \dfrac{\square^2}{2}$ et bonus $\square'.\square^n \rightsquigarrow \dfrac{\square^{n+1}}{n+1}$
- > Primitive de $f(u)$ **avec** u **affine** : $f(u) \rightsquigarrow \dfrac{1}{u'}F(u)$.
- > Primitive de "petites" fractions rationnelles avec un DES.
- > Primitive avec une ou plusieurs IPP. par exemple $\displaystyle\int^x \ln(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int^x \arctan(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int^x \cos(t)e^{-t}\,dt$
- > Primitive avec changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$.
- > Primitive difficile de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

Exercices.

Exercice sur les équations différentielles.

On a fait EDL1
Méthode de variation de la constante
EDL2 (lundi)
Le principe de Cauchy (difficile et lundi ou mardi)

Il y a des exercices corrigés aux pages suivantes.

Une primitive difficile

Déterminer, sur $\mathbb{R}$, une primitive de $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ puis de $\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$

On a $2x^2+x+1 =$ On met sous forme canonique

$$\begin{aligned}
&2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]\\
&=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\right]\\
&=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]
\end{aligned}$$

On poursuit pour obtenir $\square^2+1$

$$\begin{aligned}
&=2\frac{7}{16}\left[\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]\\
&=\frac{7}{8}\left[\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{1}{2x^2+x+1}=\dfrac{8}{7}\dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}}x+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\right]}$

C'est de la forme $f(u)$ **avec** u **affine**

$$\overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow} \frac{8}{7}\frac{1}{\frac{4}{\sqrt{7}}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

On a maintenant

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x^2+x+1}&=\frac{41(4x+1)+1492}{2x^2+x+1}\\
&=41\frac{4x+1}{2x^2+x+1}+1492\frac{1}{2x^2+x+1}\\
&\overset{\text{Une primitive}}{\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow} 41\ln\left|2x^2+x+1\right|+1492\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)
\end{aligned}$$

Soit l'EDL 2, $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}\, y' + \omega_0^2\, y = 0$

Discuter selon la valeur de Q le signe du discriminant de l'équation caractéristique.
Lorsque $\Delta < 0$, donner les solution de l'EDL 2

> C'est une EDL 2.

> Équation caractéristique

On résout $X^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\, X + \omega_0^2 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4.1.\omega_0^2$

Comme on veut le signe du discriminant, on fait FFB

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4.\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2 - 4Q^2\omega_0^2}{Q^2} = \omega_0^2 \frac{1 - 4Q^2}{Q^2} = \omega_0^2 \frac{(1-2Q)(1+2Q)}{Q^2}$$

Q	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		∞
$1-2Q$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$1+2Q$		$-$	0	$+$	0	$+$	
signe Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lorsque $\Delta > \dfrac{1}{2}$, alors l'équation admet deux racines complexes

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} + i\sqrt{\omega_0^2 \frac{1-4Q^2}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{Q} + i \underbrace{\omega_0 \sqrt{\frac{1-4Q^2}{Q^2}}}_{=\Omega_0} \text{ et } r' = \overline{r}$$

Conclusion : Les solutions sont $y(t) = A\, e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \cos(\Omega_0 t) + B\, e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \sin(\Omega_0 t)$

Un exemple d'utilisation du principe de Cauchy

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et h une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$

On étudie l'équation différentielle : (E) $y' + a\,y = h(x)$

1. Montrer que, si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E),
   alors la fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ l'est aussi.
2. En déduire, avec principe de Cauchy, qu'une solution f est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$
3. Écrire toutes les solutions de l'équa diff (E).
   En déduire que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique.

1. On suppose que la fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E),
   ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) + a\,f(x) = h(x)$

   La fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ est dérivable et on a $g(x) = f(x+T)$
   $g'(x) = f'(x+T)$

   ainsi on a $g'(x) + a\,g(x) = f'(x+T) + a\,f(x+T)$,
   $= h(x+T)$ `C'est l'équa diff appliquée en` $x+T$
   $= h(x)$ `Car la fonction` h `est T-périodique`

   Conclusion la fonction g est une solution de l'équation (E)

2. On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

   $\Longrightarrow$. On suppose que la fonction f est T-périodique, ainsi $f(0) = f(T)$

   $\Longleftarrow$. On suppose que la fonction f est une solution de l'équation (E) et que $f(0) = f(T)$

   On va montrer que la fonction f est T-périodique

   Les fonctions f et g vérifient la même EDL 1 et $g(0) = f(0+T) = f(T) = f(0)$
   ainsi d'après le principe de Cauchy d'ordre 1, on sait que $f = g$, CàD $\forall\, x,\ g(x) = f(x+T) = f(x)$

   Conclusion : la fonction f est T-périodique

3. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

   $$\forall\, x\ \ y(x) = y_p(x) + K\,e^{-a\,x} \qquad \textit{avec } y_p \textit{ une sol part}$$

   Un solution est est T-périodique Ssi $y(T) = y(0) \iff y_p(T) + K\,e^{-a\,T} = y_0(0) + K\,e^{-a\,0}$
   $\iff K\left[1 - e^{-a\,T}\right] = y_p(T) - y_p(0)$
   $\iff K = \dfrac{y_p(T) - y_p(0)}{[1 - e^{-a\,T}]}$

   Conclusion : l'équation (E) admet une unique solution T-périodique, lorsque $K = \dfrac{y_p(T) - y_p(0)}{[1 - e^{-a\,T}]}$