# TD 8 Racine n-ième

Vendredi 06 Novembre 2026.

**Exercice 1.** [Correction] Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{5}\right]$

On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Placer $\omega, \omega^2, \omega^3$ et $\omega^4$ sur le cercle trigo.
2. D'une part. Montrer que $A = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$.
3. D'autre part.
   > Calculer $A+B$ et $A.B$.
   > En déduire la valeur de $A$ et de $B$.
4. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right), \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

**Exercice 2.** [Correction] Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{11}\right)$ donc $\omega$ est la racine 11-ième fondamentale de l'unité.

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{Et} \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. Autour de $\omega$
   > Calculer $\omega^{11}$. Placer dans le plan complexe, les complexes : $\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$,...., $\omega^{10}$.
   > En déduire que : $\overline{S} = T$ et $\mathrm{Im}S > 0$
2. Somme/produit.
   (a) Calculer $S+T$ et vérifier que : $S.T = 3$ Le calcul de $S.T$ est un peu lourd. Admettre ?
   (b) En déduire la valeur de $S$ et de $T$.
3. Calculs intermédiaires.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$
   (b) Montrer que : $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$
4. En utilisant Q4a. et Q4b., exprimer $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ en fonction de $T$ et $S$, puis vérifier que

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$

**Exercice 3.** [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère le polynôme
$$Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$
   (a) Est ce que 0 est une racine du polynôme $Q_n$ ?
   (b) Montrer que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall z \in \mathbb{C},\ Q_n(-z) = Q_n(z)$.
   (c) Vérifier que : $Q_n(z)$ est de degré $2n$ et calculer son coefficient dominant.
   Calculer le coefficient de $z^{2n-2}$.
   (d) **Bonus** Montrer que : $Q_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p z^{2n-2p}$
   (e) À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, montrer que les racines de $Q_n$ sont $r_k = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ avec $k \in \{1,2,...,2n\}$
   (f) En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.
   On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}$,.....
   En déduire que
$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\right)....\left(X^2 - (r_n)^2\right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
   (g) En développant l'expression factorisée précédente, calculer le coefficient de $X^{2n-2}$ du polynôme $Q$
$$\text{En déduire que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
   (b) en déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\tan^2(x)} + 1$.
   (c) On pose pour $n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
      i. A l'aide de l'encadrement précédent construire un encadrement pour $S_n$.
      ii. En déduire que : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

1. Est ce que 0 est une racine du polynôme $Q_n$ ?
$$\begin{aligned}\text{On a } Q_n(0) &= \frac{1}{2i}\left[(0+i)^{2n+1} - (0-i)^{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left[(i)^{2n+1} - (-i)^{2n+1}\right]\end{aligned}$$
On utilise $i^2 = -1$ ainsi $(i)^{2n+1} = (i^2)^n i$
et $(-i)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(i)^{2n+1} = -(i^2)^n i$
$$= \frac{1}{2i}\left[(-1)^n i + (-1)^n i\right] = (-1)^n \neq 0$$
Conclusion : 0 n'est pas une racine de $Q_n$.

2. Montrer que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall z \in \mathbb{C},\ Q_n(-z) = Q_n(z)$.
$$\begin{aligned}\text{On a } Q_n(-z) &= \frac{1}{2i}\left[(-z+i)^{2n+1} - (-z-i)^{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left[(-(z-i))^{2n+1} - (-(z+i))^{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left[(-1)^{2n+1}(z-i)^{2n+1} - (-1)^{2n+1}(z+i)^{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left[-(z-i)^{2n+1} + (z+i)^{2n+1}\right] = Q_n(z)\end{aligned}$$
Conclusion le polynôme $Q_n$ est pair.

3. Vérifier que : $Q_n(z)$ est de degré $2n$ et calculer son coefficient dominant. Calculer le coefficient de $z^{2n-2}$.

On a avec le binôme $Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right]$$

On regroupe les deux sommes et on factorise

Attention $i^k$ se factorise aussi

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\left[1-(-1)^k\right]$$

$$= \underbrace{\mathcal{O}}_{k=0} + \underbrace{(2n+1)z^{2n}}_{k=1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{k=2} + \underbrace{-\binom{2n+1}{3}z^{2n+2}}_{k=3} + \cdots$$

Conclusion : Le polynôme est de degré $(2n)$ et son coef dominant est $2n+1$

Le coefficient de $z^{2n-2}$ est $-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$

4. **Bonus** Montrer que : $Q_n(z) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p z^{2n-2p}$

On va finir le calcul précédent

$$Q_n(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\left[1-(-1)^k\right]$$

On discute la valeur de $\left[1-(-1)^k\right]$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k \underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k 2$$

*On ré-indexe avec $k = 2p+1$. C'est possible car $k$ est impair*

$$= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i(-1)^p}$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p z^{2n-2p}$$

5. À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, montrer que les racines de $Q_n$ sont $r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ avec $k \in \{1,2,...,2n\}$

On résout l'équation $Q_n(z) = 0 \iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$

$$\iff \left\{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 0\right.$$

$$\iff \begin{cases} U^{2n+1} = 1 & (A) \\ et & \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B) \end{cases}$$

> Les solutions de $U^{2n+1} = 1$ sont les racines (2n+1)-ième de l'unité,

CàD $\omega_k = \exp\left(i\,k\,\frac{2\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \{0,..,2n\}$

> On a maintenant : $\frac{z+i}{z-i} = U_k$

$$\iff z+i = \omega_k(z-i)$$

$$\iff z(1-\omega_k) = -i(1+\omega_k)$$

$$\iff z = \frac{-i(1+\omega_k)}{(1-\omega_k)}$$

*Valide Ssi* $1-\omega_k \neq 0$ *SSi* $\omega \neq 1$ *Ssi* $k \neq 0$ *Ssi* $\boxed{k \in \{1,2,...,(2n)\}}$

Conclusion : les racines de $Q_n$ sont $r_k = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ avec $k \in \{1,2,...,2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1,..,2n\}$, on a

$$r_k = \frac{-i\left(1+\omega_k\right)}{\left(1-\omega_k\right)} = \frac{-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}$$

Argument Moitié

$$= \frac{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}$$

6. On remarque que $r_{n+1} = -r_n$, $r_{n+2} = -r_{n-1}$... etc ... on le justifie en utilisant la $\pi$-périodicité et l'imparité de tan.
On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= (2n+1)(X-r_1)(X-r_2)...(X-r_n)\ \ (X+r_1)(X+r_2)...(X+r_n) \\ &= (2n+1)(X-r_1)(X+r_1)...(X-r_n)(X+r_n) \\ &= (2n+1)\left(X^2-(r_1)^2\right)\left(X^2-(r_2)^2\right)...\left(X^2-(r_n)^2\right) \end{aligned}$$

7. Le coefficient de $X^{2n-2}$ du polynôme $Q$ est égale à

> D'une part avec la question Q2a., il est égale à : $-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

> D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : $(2n+1)\left[-r_1^2-\cdots-r_n^2\right]$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = r_1^2+....+r_n^2 = \frac{\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$

8. (a) Montrer que : $\forall x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0<\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

Convexité

(b) En déduire que : $\forall x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\tan^2(x)}+1$.

On sait que : $0<a<b<c \Longrightarrow 0<a^2<b^2<c^2$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ 0<\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \\ \Longrightarrow 0<\sin^2 x \leqslant x^2 \leqslant \tan^2 x \\ \Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x} \\ \Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} \\ \Longrightarrow 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<1+\frac{1}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

(c) On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

i. À l'aide de l'encadrement précédent construire un encadrement pour $S_n$.

Pour tout $k \in \{1,..,n\}$,alors $0<\dfrac{k\pi}{2n+1}<\dfrac{\pi}{2}$.

On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\dfrac{k\pi}{2n+1}$

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}+1$$

On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$, ainsi

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n \leqslant \frac{n(2n-1)}{3}+n$$

ii. En déduire que : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

On isole $S_n$ puis utilise le théorème d'encadrement.

# Correction.

**Solution de l'exercice 1 (Énoncé)**

1. Le complexe $\omega = \exp\left[i\frac{2\pi}{5}\right]$ est la "première" racine 5-ième de l'unité

   ainsi on a : $\omega^5 = 1$ et $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$

2. Montrer que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

   On a $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$

   $= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ $= e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}$

   $= (C+iS) + (C-iS)$ $= (C+iS) + (C-iS)$

   $= 2\cos\frac{2\pi}{5}$ $= 2\cos\frac{4\pi}{5}$

3. Calculer $A+B$ et $A.B$. En déduire la valeur de $A$ et de $B$.

   $>$ On a $A+B = (\omega+\omega^4) + (\omega^2+\omega^3)$

   On sait que : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$

   $= -1$

   et $A.B = (\omega+\omega^4) + (\omega^2+\omega^3)$

   $= \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$

   On sait que : $\omega^5 = 1$

   $= \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2$

   On sait que : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$

   $= -1$

   De plus $\begin{cases} A+B = -1 \\ AB = -1 \end{cases} \iff \ldots \iff \begin{cases} B = -1-A \\ A^2+A-1 = 0 \end{cases}$

   Donc $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

   Comme $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, on a donc $A = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)** Soit $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{11}\right)$.

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \text{ Et } T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. On a

   → Tout d'abord on a le dessin d'un gâteaux divisé en 11 parts égales.

   → C'est marqué dessus, les Racines 11-ième de l'unité vérifient $\omega^{11} = 1$.

   → Enfin on sait que $1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = 0$.

2. On fait un bô dessin et on devine que

   $$\overline{S} = T \text{ et } \mathrm{Im}S > 0$$

   → Rappel : $\overline{S}$ est le conjugué de $S$ et $\mathrm{Im}S$ est la partie imaginaire de $S$

3. Montrer $S + T = -1$ et $S.T = 3$.

   On a : $S + T = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10} = -1 + (1 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}) = -1$

   $$S.T = \left(\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9\right)\left(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}\right)$$
   $$= \text{On fait le méga développement}$$
   $$= \text{On simplifie avec } \omega^{11} = 1 \text{ donc } \omega^{12} = \omega^{11+1} = \omega$$
   $$= \text{On trouve au final} = 5 - 2(\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{10}) = 5 - 2 = 3$$

   En déduire la valeur de $S$ et de $T$.

   On trouve facilement (par substitution) $S^2 + S + 3 = 0$

   On a donc 2 solutions possibles $S_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11}$ et $S_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$

   Or $\mathrm{Im}S > 0$ donc

   $$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11} \text{ et } T = \overline{S} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$$

4. Montrer que : $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$ et $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

   On a : $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = \left[\sum_{k=0}^{10}(\square)^k\right] - \underset{k=0}{\overset{1}{\sqcup}}$ *avec* $\square = -\omega^3$

   $$= \frac{1-\square^{11}}{1-\square} - 1$$
   $$= \frac{\square - \square^{11}}{1-\square}$$
   $$= \square\frac{1-\square^{10}}{1-\square}$$
   $$= \left(-\omega^3\right)\frac{1-\omega^{30}}{1+\omega^3}$$
   $$= \left(-\omega^3\right)\frac{1-\omega^{-3}}{1+\omega^3}$$

   Argument moitié

   $$= -\omega^3\frac{\omega^{-3/2}\left(\omega^{3/2} - \omega^{-3/2}\right)}{\omega^{3/2}\left(\omega^{-3/2} + \omega^{3/2}\right)} = -\frac{2i\sin\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)}{2\cos\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)} = -i\tan\left(3\frac{\pi}{11}\right)$$

   $$\omega - \omega^{10} = \omega - \overline{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{11}} - e^{-i\frac{2\pi}{11}} = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

   vérifier que : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$

On a $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=i\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k-2i\left(\omega-\omega^{10}\right)$

On détaille la somme

$=i\left[-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8\right]-2i\left(\omega-\omega^{10}\right)$

On factorise $i$ et et on reconnait $S$ et $T$

$=i\left[T-S\right]$

$=i\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{11}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{11}\right)\right]$

$=i\left[-i\sqrt{11}\right]=\sqrt{11}$ Yes.